Corsi di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Ingegneria Elettronica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1. 12/12/2005

COGNOME ______________________ NOME ______________________

MATRICOLA ____

(1) Enunciare il Principio di Induzione illustrandone due applicazioni.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di derivabilità delle funzioni composte.

(3) Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$ tali che f risulti continua in $[a, b] \setminus \{x_0\}$. Supposto che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. f ammette massimo in $[a, b]$ Vero Falso

B. Se $\ell > f(a)$ allora f ammette minimo in $[a, b]$ Vero Falso

(4) Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua e crescente. Posto $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. Esiste $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} \in \overline{\mathbb{R}}$. Vero Falso

B. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$. Vero Falso

Corsi di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Ingegneria Elettronica
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1. 16/12/2005

COGNOME ______________________ NOME ______________________

MATRICOLA ______________________

1) La successione $a_n = \dfrac{\sin(\frac{2}{n-1})}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2}$ per $n \to +\infty$

[a] ha limite 4
[b] diverge a $+\infty$
[c] ha limite 1
[d] nessuna delle precedenti

2) Se $\alpha > 0$ la funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\alpha x}-1}{x} & x > 0, \\ \alpha(1+\sin(\frac{x}{2})) & x \leq 0. \end{cases}$

[a] è derivabile su $I\!R$
[b] non è continua in $x = 0$
[c] $x = 0$ è un punto angoloso se $\alpha \neq 1$
[d] nessuna delle precedenti

3) L'equazione $e^x = \alpha(x+1)$ ammette una sola soluzione

[a] per ogni $\alpha \in I\!R$
[b] per ogni $\alpha \leq 2$
[c] per nessun $\alpha > 0$
[d] nessuna delle precedenti

4) La funzione $f(x) = e^{\sin x^2} - 1 - \cosh(x) + \cos(x)$, per $x \to 0$ è un infinitesimo

[a] di ordine 2
[b] di ordine superiore a 4
[c] di ordine 4
[d] nessuna delle precedenti

5) L'integrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} \log(x^2+2)\, dx$ vale

[a] $\log(3) - 2 + 2\sqrt{2}\arctan(\frac{1}{\sqrt{2}})$
[b] non è definito
[c] $\frac{1}{2}\log 2 - \frac{\pi}{4}$
[d] nessuna delle precedenti

6) L'integrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\log(1+\sqrt{x}) + x + x^{\alpha}}\, dx$

[a] converge per ogni $\alpha \in I\!R$
[b] converge per ogni $\alpha > \frac{3}{2}$
[c] converge per ogni $\alpha \neq 1$
[d] nessuna delle precedenti

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 12/12/2005

COGNOME ______________________ NOME ______________________

MATRICOLA ____

(1) Fornire la definizione di funzione derivabile in un punto. Illustrarne il significato geometrico e cinematico.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di regolarità di successioni monotone.

(3) Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b)$ tale che $\lim_{x \to b^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Posto che $f(a) < \ell$, provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A.	f ammette minimo in $[a, b)$	Vero	Falso
B.	f ammette massimo in $[a, b)$	Vero	Falso

(4) Siano $(a_n)_{n \geq 1}$ e $(b_n)_{n \geq 1}$ due successioni positive e divergenti tali che $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A.	Se $(c_n)_{n \geq 1}$ è limitata allora $a_n + c_n \sim b_n + c_n$ per $n \to +\infty$	Vero	Falso
B.	$a_n^n \sim b_n^n$ per $n \to +\infty$	Vero	Falso

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\mathbf{A}}$ È vera. Infatti, sia

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [a,b) \\ \ell & \text{se } x = b \end{cases}$$

Allora, essendo $\lim\limits_{x\to b^-} \tilde{f}(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \ell = \tilde{f}(b)$, la funzione $\tilde{f}(x)$ risulta continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ e quindi, dal Teorema di Weierstrass, esistono due costanti $m < M$ tali che $m \le \tilde{f}(x) \le M$ per ogni $x \in [a,b]$. In particolare si ottiene che $m \le f(x) \le M$ per ogni $x \in [a,b)$ e dunque che $f(x)$ è limitata in $[a,b)$.

In alternativa, dalla definizione di limite $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \ell \in I\!R$ si ottiene che esiste $\delta \in (0, b-a)$ tale che

$$\ell - 1 \le f(x) \le \ell + 1 \quad \forall x \in (b-\delta, b)$$

Essendo $f(x)$ continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b-\delta]$, dal Teorema di Weierstrass, esistono $m < M$ tali che $m \le f(x) \le M$ per ogni $x \in [a, b-\delta]$. Allora, posto $\tilde{M} = \max\{M, \ell+1\}$ e $\tilde{m} = \min\{m, \ell-1\}$, da quanto provato sopra otteniamo

$$\tilde{m} \le f(x) \le \tilde{M}, \quad \forall x \in [a,b)$$

e dunque che $f(x)$ è limitata in $[a,b)$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È falsa. La funzione $f(x) = 1 - x$ risulta continua in $[0,1)$ con $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$ ma non ammette minimo in $[0,1)$ essendo $f(x) > 0$ per ogni $x \in [0,1)$ e $\inf\limits_{x\in[0,1)} f(x) = 0$.

(4) $\boxed{\mathbf{A}}$ È vera. Infatti,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(a_n)}{\log(b_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(\frac{a_n}{b_n}) + \log(b_n)}{\log(b_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(\frac{a_n}{b_n})}{\log(b_n)} + 1.$$

Per ipotesi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$ mentre $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, ne segue che $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\log(\frac{a_n}{b_n})}{\log(b_n)} = 0$ e dunque che $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\log(a_n)}{\log(b_n)} = 1$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È falsa. Si considerino le due successioni positive e divergenti $a_n = 2\pi n$ e $b_n = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$. Allora per $n \to +\infty$ si ha $a_n \sim b_n$ mentre per ogni $n \in I\!N$ risulta $\sin(a_n) = 0$ e $\sin(b_n) = 1$, quindi $\sin(a_n) \not\sim \sin(b_n)$.

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 15/12/2005

COGNOME ______________________ NOME ______________________

MATRICOLA ____

1) La successione $a_n = n^2 \left(\sqrt{1+\frac{\alpha}{n}} - \cos\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ è divergente

$\boxed{\text{a}}$ per ogni $\alpha \in I\!R$

$\boxed{\text{b}}$ per ogni $\alpha \neq -1$

$\boxed{\text{c}}$ per ogni $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

2) L'equazione $\log x = \alpha(x-1)$ con $\alpha \in I\!R$

$\boxed{\text{a}}$ ha una sola soluzione per ogni $\alpha \in I\!R$

$\boxed{\text{b}}$ non ha soluzione per ogni $\alpha < 0$

$\boxed{\text{c}}$ ha due soluzioni per ogni $\alpha > 0$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

3) La funzione $f(x) = e^{\sin x^2} - 2\sqrt{1+x^2} + 1$, per $x \to 0$ è un infinitesimo

$\boxed{\text{a}}$ di ordine 2

$\boxed{\text{b}}$ di ordine superiore a 4

$\boxed{\text{c}}$ di ordine 4

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

4) L'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{e^{2x} - x - 1}\, dx$

$\boxed{\text{a}}$ converge per ogni $\alpha \in I\!R$

$\boxed{\text{b}}$ converge per ogni $\alpha > 0$

$\boxed{\text{c}}$ converge per ogni $\alpha \neq 1$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

5) L'integrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x}{x^2+2x+2}\, dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $\log 2 - \frac{\pi}{2}$

$\boxed{\text{b}}$ $\log \sqrt{2}$

$\boxed{\text{c}}$ $\log \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

6) Il raggio del cilindro circolare retto più grande che può essere inscritto in una sfera di raggio 1 è

$\boxed{\text{a}}$ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\boxed{\text{b}}$ $\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\boxed{\text{c}}$ $\frac{1}{3}$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, dai limiti notevoli per $n \to +\infty$ si ottiene

$$b_n = \sqrt{1+\frac{\alpha}{n}} - \cos\frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{\alpha}{2n} + o(\frac{1}{n}) - 1 + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n}) = \frac{\alpha+1}{2n} + o(\frac{1}{n})$$

quindi

$$a_n = n^2 b_n = (\alpha+1)n + o(n)$$

e se $\alpha \neq -1$ la successione risulta divergente.
Dagli sviluppi di Taylor per $x \to 0$ di $\sqrt{1+x}$ e $\cos x$, si ha inoltre che se $\alpha = -1$ allora per $n \to +\infty$

$$b_n = 1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} - 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{24n^2} + o(\frac{1}{n^2}) = -\frac{1}{6n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

e quindi

$$a_n = n^2 b_n = -\frac{1}{6} + o(1)$$

risulta convergente.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Consideriamo la funzione $f(x) = \log x - \alpha(x-1)$ e cerchiamone gli zeri. Osserviamo innanzitutto che $f(1) = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, quindi $\boxed{\text{b}}$ è falsa. La funzione è definita e continua in $(0,+\infty)$ con $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ mentre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \leq 0 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 0 \end{cases}$$

La funzione risulta inoltre derivabile in $(0,+\infty)$ con

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \alpha, \quad \forall x > 0.$$

Se $\alpha \leq 0$, allora $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$ e quindi $f(x)$ risulta strettamente crescente in $(0,+\infty)$. Essendo inoltre $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ mentre $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, dal Teorema dei valori intermedi deduciamo che $f(x)$ ammette uno ed un solo zero.
Se invece $\alpha > 0$, allora $f'(x) > 0$ se $x < \frac{1}{\alpha}$ e $f'(x) < 0$ se $x > \frac{1}{\alpha}$. Quindi $f(x)$ risulta strettamente crescente in $(0, \frac{1}{\alpha})$, strettamente decrescente in $(\frac{1}{\alpha}, +\infty)$ e $x = \frac{1}{\alpha}$ risulta un punto di massimo assoluto per $f(x)$ con $f(\frac{1}{\alpha}) = -\log\alpha + \alpha - 1$.
Si osservi ora che essendo $\log x$ funzione concava e $y = x-1$ retta tangente al grafico di $\log x$ in $x = 1$, per ogni $\alpha > 0$ con $\alpha \neq 1$ risulta $f(\frac{1}{\alpha}) > 0$. Essendo $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, dal Teorema dei valori intermedi otteniamo che $f(x)$ ammette uno ed un solo zero in $(0, \frac{1}{\alpha})$ e analogalmente, essendo $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, sempre dal Teorema dei valori intermedi otteniamo che $f(x)$ ammette uno ed un solo zero in $(\frac{1}{\alpha}, +\infty)$. Quindi $\boxed{\text{a}}$ è falsa.
Infine, per quanto osservato sopra, se $\alpha = 1$ allora $f(\frac{1}{\alpha}) = f(1) = 0$ e $f(x) < 0$ per ogni $x > 0$, $x \neq 1$. Quindi $f(x)$ ammette uno ed un solo zero ed anche $\boxed{\text{c}}$ è falsa.

(3) La risposta esatta è $\boxed{\text{c}}$. Infatti, ricordando che $\sin y = y + o(y^2)$ per $y \to 0$, per $x \to 0$ otteniamo che

$$\sin x^2 = x^2 + o(x^4)$$

Allora, essendo $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ per $y \to 0$, otteniamo

$$\begin{aligned} e^{\sin x^2} &= 1 + \sin x^2 + \frac{1}{2}\sin^2 x^2 + o(\sin^2 x^2) = \\ &= 1 + x^2 + o(x^4) + \frac{1}{2}(x^2 + o(x^4))^2 + o((x^2 + o(x^4))^2) = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Infine, essendo per $y \to 0$, $\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2)$, per $x \to 0$ abbiamo

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

quindi

$$f(x) = e^{\sin x^2} - 2\sqrt{1+x^2} + 1 = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 - 2(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4) + 1 + o(x^4) = \frac{3}{4}x^4 + o(x^4)$$

e $ord(f(x)) = 4$ per $x \to 0$.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Notiamo infatti che la funzione integranda risulta continua su $(0, +\infty)$ e dunque l'integrale risultera' convergente se e solo se risultano tali gli integrali $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^\alpha}{e^{2x} - x - 1}\,dx$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{e^{2x} - x - 1}\,dx$

Per $x \to 0$ risulta $e^{2x} = 1 + 2x + o(x)$ e quindi

$$\frac{x^\alpha}{e^{2x} - x - 1} = \frac{x^\alpha}{x + o(x)} \sim \frac{1}{x^{1-\alpha}}$$

Dal criterio del confronto asintotico segue allora che l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^\alpha}{e^{2x} - x - 1}\,dx$ converge se e solo se $1 - \alpha < 1$ ovvero $\alpha > 0$.

Per $x \to +\infty$, osserviamo che dal limite notevole $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{e^x} = 0$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, risulta

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^\alpha}{e^{2x}-x-1}}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha+p}}{e^{2x} - x - 1} = 0$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, per ogni $p > 1$. Dal criterio del confronto asintotico concludiamo che l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{e^{2x} - x - 1}\,dx$ converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Quanto sopra mostra che l'integrale proposto è convergente per ogni $\alpha > 0$.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, osservato che $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha che

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2 + 2x + 2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 2}\,dx - \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2 + 2x + 2) - \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2 + 2x + 2) - \arctan(x+1) + c \end{aligned}$$

Allora
$$\int_{-1}^{0} \frac{x}{x^2+2x+2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\log(x^2+2x+2) - \arctan(x+1)\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{\pi}{4}$$

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, detta $2h$ l'altezza del cilindro e r il suo raggio, essendo il cilindro retto inscritto nella sfera di raggio 1, si ha che $h^2 + r^2 = 1$. Allora, essendo il volume del cilindro pari a $V = 2h\pi r^2 = 2\pi(h - h^3)$, il cilindro più grande inscritto in una sfera di raggio 1 avra' altezza $2h_0$ dove h_0 è il massimo della funzione $f(h) = h - h^3$ nell'intervallo $(0, 1)$. Risulta $f'(h) = 1 - 3h^2$ e quindi $f'(h) > 0$ se e solo se $h < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Allora $h_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ed il raggio cercato è $r_0 = \sqrt{1 - h_0^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Corsi di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Ingegneria Elettronica
Prima prova scritta di Analisi Matematica I. 10/01/2006

COGNOME ______________________ NOME ______________________

MATRICOLA ____

(1) Dare la definizione di funzione continua in un punto. Classificare i tipi di discontinuità fornendo degli esempi.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle.

(3) Sia $f : (0, +\infty) \to I\!R$ derivabile. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. f è integrabile su ogni intervallo $[a, b] \subset (0, +\infty)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. f è integrabile in senso improprio su $(0, +\infty)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $F(x) = \int_1^x f(t)\, dt$ ammette derivata seconda su $(0, +\infty)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Siano $f,\ g\ : (a, b) \to I\!R$, $x_0 \in (a, b)$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. Se $l_1 > l_2$ allora esiste un intervallo $I \subset (a, b)$ tale che $f(x) > g(x)$ per ogni $x \in I \setminus \{x_0\}$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. Se $l_1 = l_2$ allora $f(x_0) = g(x_0)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Corsi di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Ingegneria Elettronica
Seconda prova scritta di Analisi Matematica I. 13/01/2006

COGNOME ______________________ NOME ______________________

MATRICOLA ______________________

1) La successione $\left(\frac{n+3}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}$ per $n \to +\infty$

a ha limite e
b ha limite e^3
c ha limite e^2
d nessuna delle precedenti

2) Se $\alpha > 0$ la funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)-x}{x(\log(1+x)-x)} & x > -1 \text{ e } x \neq 0 \\ \frac{1}{3} & x = 0 \end{cases}$

a è derivabile su $(-1, +\infty)$
b non è continua in $x = 0$
c $x = 0$ è un punto angoloso
d nessuna delle precedenti

3) L'equazione $\frac{1}{2}x^2 + \cos(x) = 2$

a ammette una sola soluzione
b ammette due soluzioni
c non ammette soluzioni
d nessuna delle precedenti

4) La funzione $f(x) = (\sin(x) - \cos(x))\cos(2x)$, per $x \to \frac{\pi}{4}$ è un infinitesimo

a di ordine 1
b di ordine 3
c di ordine 2
d nessuna delle precedenti

5) L'integrale $\displaystyle\int_0^1 \arcsin^2(x)\, dx$ vale

a $\frac{\pi}{2} - 2$
b $\frac{\pi^2}{4} - 2$
c $\frac{1}{2}\log 2 - \frac{\pi}{2}$
d nessuna delle precedenti

6) L'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 + x^\alpha}{\log(1 + x^\alpha) + x^{3\alpha}}\, dx$

a converge per ogni $\alpha \in (0, 1)$
b converge per ogni $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$
c converge per ogni $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$
d nessuna delle precedenti

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 09/01/2006

(1) Fornire la definizione di funzione integrabile secondo Riemann.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di caratterizzazione delle funzioni costanti.

(3) Sia $f(x)$ funzione continua e positiva in $[1, +\infty)$ tale che $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ risulti convergente. Data $g(x)$ continua, positiva e limitata in $[1, +\infty)$, provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\int_1^{+\infty} f(x)g(x)\, dx$ converge — Vero — Falso

B. $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}\, dx$ converge — Vero — Falso

(4) Sia $f(x)$ una funzione continua in $\mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ è limitata in $\mathbb{R}$. — Vero — Falso

B. $f(x)$ ammette minimo in $\mathbb{R}$. — Vero — Falso

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\mathbf{A}}$ È vera. Infatti, essendo $g(x)$ positiva e limitata in $[1,+\infty)$, esiste $M>0$ tale che $0<g(x)\le M$ per ogni $x\in[1,+\infty)$. Quindi la funzione $f(x)g(x)$ è continua in $[1,+\infty)$ e verifica

$$0<f(x)g(x)\le Mf(x) \quad \forall x\in[1,+\infty)$$

Allora, essendo per ipotesi $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ convergente, dal criterio del confronto si ottiene che anche $\int_1^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ converge.
Alcune osservazioni su errori frequenti. Non è vero che essendo $g(x)$ continua, positiva e limitata in $[1,+\infty)$, $g(x)$ risulta integrabile in senso improprio in $[1,+\infty)$ (si pensi alla funzione costante $g(x)=1$). Non è vero che se $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ risultano convergenti allora anche $\int_1^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ risulta convergente.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È falsa. Si considerino le funzioni $f(x)=\frac{1}{x^2}$ e $g(x)=\frac{1}{x}$. Allora $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, $g(x)$ risulta continua, positiva e limitata in $[1,+\infty)$ ma $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}\,dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx$ diverge.

(4) $\boxed{\mathbf{A}}$ È vera. Dalla definizione di limite $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\ell\in I\!R$ si ottiene che esiste $L>0$ tale che

$$\ell-1\le f(x)\le \ell+1 \quad \forall |x|>L$$

Essendo $f(x)$ continua nell'intervallo chiuso e limitato $[-L,L]$, dal Teorema di Weierstrass, esistono $m<M$ tali che $m\le f(x)\le M$ per ogni $x\in[-L,L]$. Allora, posto $\tilde{M}=\max\{M,\ell+1\}$ e $\tilde{m}=\min\{m,\ell-1\}$, da quanto provato sopra otteniamo

$$\tilde{m}\le f(x)\le \tilde{M}, \quad \forall x\in I\!R$$

e dunque che $f(x)$ è limitata in $I\!R$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È falsa. Si consideri ad esempio la funzione $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$. Tale funzione risulta continua in $I\!R$ con $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ ma non ammette minimo in $I\!R$.

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 11/01/2006

1) La successione $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

$\boxed{a}$ converge a 0 $\boxed{b}$ converge a 1
$\boxed{c}$ diverge $\boxed{d}$ nessuna delle precedenti

2) L'equazione $\log(x+1) = x^2 + \alpha$ con $\alpha \in I\!R$ ammette un'unica soluzione

$\boxed{a}$ per nessun $\alpha \in I\!R$ $\boxed{b}$ per un unico $\alpha \in I\!R$
$\boxed{c}$ per ogni $\alpha > 0$ $\boxed{d}$ nessuna delle precedenti

3) Per $x \to 0^+$ la funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2} - \cos x}{x^\alpha}$ è un infinitesimo

$\boxed{a}$ per ogni $\alpha > 4$ $\boxed{b}$ per $\alpha = 2$
$\boxed{c}$ per ogni $\alpha > 0$ $\boxed{d}$ nessuna delle precedenti

4) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{x^\alpha + 1}{e^{x^2}} & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ nel punto $x = 0$

$\boxed{a}$ è continua per ogni $\alpha \in I\!R$ $\boxed{b}$ è derivabile per ogni $\alpha \geq 1$
$\boxed{c}$ è continua ma non derivabile per ogni $\alpha > 0$ $\boxed{d}$ nessuna delle precedenti

5) L'integrale $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx$ vale

$\boxed{a}$ $1 + \log 3$ $\boxed{b}$ $1 + \log \frac{2}{3}$
$\boxed{c}$ $1 + \frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$ $\boxed{d}$ nessuna delle precedenti

6) L'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^{\alpha x} - x - 1}\, dx$

$\boxed{a}$ converge per ogni $\alpha \in I\!R$ $\boxed{b}$ converge per ogni $\alpha > 0$
$\boxed{c}$ converge per ogni $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ $\boxed{d}$ nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, osservato che

$$a_n = e^{n\log(1-\frac{1}{n^2})}$$

dai limiti notevoli per $n \to +\infty$ si ottiene

$$n\log(1-\frac{1}{n^2}) \sim -\frac{1}{n} \to 0$$

e quindi $a_n \to 1$.
In alternativa, si osservi che dal limite notevole $(1+\frac{\alpha}{x_n})^{x_n} \to e^\alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $x_n \to +\infty$, si ottiene

$$a_n = (1-\frac{1}{n^2})^n = (1-\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n})^n \to e \cdot \frac{1}{e} = 1$$

Si poteva infine procedere utilizzando il limite notevole $a_n^{b_n} \to a^b$, se $a_n \to a > 0$ e $b_n \to b \in \mathbb{R}$, nel seguente modo

$$a_n = (1-\frac{1}{n^2})^n = [(1-\frac{1}{n^2})^{n^2}]^{\frac{1}{n}} \to 1$$

essendo $(1-\frac{1}{n^2})^{n^2} \to \frac{1}{e}$ mentre $\frac{1}{n} \to 0$.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Consideriamo la funzione $f(x) = \log(x+1) - x^2$ e studiamone l'immagine. Osserviamo innanzitutto che la funzione è definita e continua in $(-1,+\infty)$ con $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$ mentre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2(\frac{\log(x+1)}{x^2} - 1) = -\infty$$

La funzione risulta inoltre derivabile in $(-1,+\infty)$ con

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - 2x = -\frac{2x^2+2x-1}{x+1}, \quad \forall x > -1.$$

Essendo $x+1>0$ per ogni $x \in (-1,+\infty)$, avremo $f'(x) > 0$ se e solo se $2x^2+2x-1 < 0$. Si ottiene allora che $f'(x) > 0$ per $-1 < x < \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ e $f'(x) < 0$ per $\frac{-1+\sqrt{3}}{2} < x$.
Ne segue che $f(x)$ risulta strettamente crescente in $(-1, \frac{-1+\sqrt{3}}{2})$, strettamente decrescente in $(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty)$ e che $x_0 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ è punto di massimo assoluto per $f(x)$.
Utilizzando il Teorema dei valori intermedi, dai risultati provati sopra otteniamo allora che l'equazione $f(x) = \alpha$ ammette una sola soluzione per $\alpha = \alpha_0 = f(x_0)$, ammette due soluzioni per ogni $\alpha < \alpha_0$ e nessuna soluzione per $\alpha > \alpha_0$.

(3) La risposta esatta è $\boxed{\text{b}}$. Infatti, ricordando che $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ e che $\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$, otteniamo che

$$\sqrt{1-x^2} - \cos x = o(x^2)$$

e quindi che per $\alpha = 2$ si ha che la funzione è un infinitesimo essendo

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} - \cos x}{x^2} = \frac{o(x^2)}{x^2} \to 0 \quad \text{per } x \to 0.$$

Precisamente, ricordando che $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ e che $\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$ per $x \to 0$, si ottiene che

$$\sqrt{1-x^2} - \cos x = -\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)$$

e dunque che per $x \to 0$ si ha

$$f(x) = \frac{-\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)}{x^\alpha} \sim -\frac{x^{4-\alpha}}{6} \to 0$$

se e solo se $\alpha < 4$.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Infatti risulta $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1 = f(0)$ mentre

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha + 1}{e^{x^2}} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha > 0 \\ 2 & \text{se } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

Quindi $f(x)$ risulta continua in $x = 0$ se e solo se $\alpha > 0$ e $\boxed{\text{a}}$ è falsa. Riguardo alla derivabilità, osserviamo innanzitutto che la funzione non risulta derivabile in $x = 0$ per ogni $\alpha \leq 0$ non essendo in tal caso continua. Per $\alpha > 0$ abbiamo che $f(x)$ risulta derivabile in ogni $x \neq 0$ con

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^{\alpha-1} - (x^\alpha+1)2x}{e^{x^2}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e quindi che $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 0 = f'_-(0)$ mentre

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha x^{\alpha-1} - (x^\alpha+1)2x}{e^{x^2}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

Ne segue che per ogni $\alpha \geq 1$ esiste $f'_+(0) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$ ma $f'_+(0) = f'_-(0)$ solo se $\alpha > 1$. Quindi $\boxed{\text{b}}$ e $\boxed{\text{c}}$ sono false.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, operando la sostituzione $t = \sqrt{x^2+1}$ (e quindi $x = \sqrt{t^2-1}$ e $dx = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt$) si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx &= \int_2^3 \frac{t^2}{t^2-1}\, dt = [t]_2^3 + \frac{1}{2}\Big(\int_2^3 \frac{1}{t-1}\, dt - \int_2^3 \frac{1}{t+1}\, dt\Big) \\ &= 1 + \frac{1}{2}[\log(t-1) - \log(t+1)]_2^3 = 1 + \frac{1}{2}(\log 3 - \log 4 + \log 2) = 1 + \frac{1}{2}\log\frac{3}{2} \end{aligned}$$

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Notiamo infatti che la funzione integranda risulta continua in $(0,+\infty)$ e dunque l'integrale risultera' convergente se e solo se risultano tali gli integrali $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\alpha x}-x-1}\,dx$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^{\alpha x}-x-1}\,dx$

Per $x\to 0$ risulta $e^{\alpha x} = 1+\alpha x+\frac{\alpha^2x^2}{2}+o(x^2)$ e quindi

$$\frac{\sqrt{x}}{e^{\alpha x}-x-1} = \frac{\sqrt{x}}{(\alpha-1)x+\frac{\alpha^2x^2}{2}+o(x^2)} \sim \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{(\alpha-1)x} = \frac{1}{(\alpha-1)\sqrt{x}} & \text{se } \alpha\neq 1 \\ \frac{2\sqrt{x}}{x^2} = \frac{2}{x^{3/2}} & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

Dal criterio del confronto asintotico segue allora che l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\alpha x}-x-1}\,dx$ converge per ogni $\alpha\neq 1$ e diverge per $\alpha = 1$.
Per $x\to+\infty$, osserviamo che per $\alpha\leq 0$ risulta

$$\frac{\sqrt{x}}{e^{\alpha x}-x-1} \sim -\frac{1}{\sqrt{x}}$$

e quindi, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^{\alpha x}-x-1}\,dx$ diverge.
Se invece $\alpha>0$, dal limite notevole $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = 0$ per ogni $\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$ risulta

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x}}{e^{\alpha x}-x-1}}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{2}+p}}{e^{\alpha x}-x-1} = 0$$

per ogni $p>1$.
Dal criterio del confronto asintotico si deduce allora che l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^{\alpha x}-x-1}\,dx$ converge se e solo se $\alpha>0$.

Quanto sopra mostra che l'integrale proposto è convergente per ogni $\alpha>0$ con $\alpha\neq 1$.

Corsi di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Elettronica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 21/03/2006

COGNOME ______________________________ NOME ______________________________

MATRICOLA ______________________________

1) Illustrare la definizione di funzione derivabile in un punto $x_0 \in I\!R$. Definire inoltre, fornendo anche degli esempi, il caso in cui la funzione risultando continua in x_0, presenti in x_0 rispettivamente un punto angoloso, una cuspide o un punto a tangente verticale. Mostrare infine con un esempio che esistono punti di non derivabilità di tipo diverso da quelli sopra introdotti.

2) Enunciare e dimostrare il Teorema Fondamentale del calcolo Integrale. Dedurre la Formula Fondamentale del calcolo Integrale.

3) Siano $f, g, h : (a, b) \to I\!R$ tali che $g(x) \le f(x) \le h(x)$ per ogni $x \in (a, b)$ con g, h derivabili in $x_0 \in (a, b)$. Provare o confutare le seguenti affermazioni

A. Se $g(x_0) = h(x_0)$ allora f è continua in x_0. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. Se $g'(x_0) = h'(x_0)$ allora f è derivabile in x_0. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

4) Sia $f : [1, +\infty) \to I\!R$ strettamente decrescente e positiva. Provare o confutare le seguenti affermazioni

A. Esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x) \in I\!R$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. f ìntegrabile in senso improprio su $[1, +\infty)$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Corsi di Laurea in Ingegneria Biomedica ed Ingegneria Elettronica
Seconda prova scritta di Analisi Matematica I. 24/03/2006

COGNOME ______________________ NOME ______________________

MATRICOLA ______________________

1) La successione $a_n = \dfrac{2^{n^2}}{n!}$ per $n \to +\infty$

- [a] è irregolare
- [b] è divergente
- [c] è infinitesima
- [d] nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = \begin{cases} (x^2-1)^2 & x \leq 1 \\ e^{\frac{1}{1-x^2}} & x > 1 \end{cases}$, nel punto $x = 1$

- [a] è derivabile
- [b] non è continua
- [c] ha un punto angoloso
- [d] nessuna delle precedenti

3) La disequazione $e^{x^2-1} \geq 2x - 1$

- [a] è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$
- [b] è verificata solo se $x \leq 1$
- [c] è verificata solo se $x \geq 1$
- [d] nessuna delle precedenti

4) La funzione $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x-1}}$

- [a] non ha un asintoto obliquo
- [b] è convessa
- [c] non ha nè massimi nè minimi relativi
- [d] nessuna delle precedenti

5) L'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} \arctan(\frac{1}{x})\, dx$ vale

- [a] $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$
- [b] $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}$
- [c] $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$
- [d] nessuna delle precedenti

6) L'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} (e^{1/x} - 1)((1+x)^\alpha - x^\alpha)\, dx$

- [a] converge per ogni $\alpha \in (0,1)$
- [b] converge per ogni $\alpha > 0$
- [c] converge per ogni $\alpha < 1$
- [d] nessuna delle precedenti

Analisi Matematica 1

prima prova scritta del 20/03/2006

(1) Fornire la definizione di integrale improprio su intervalli illimitati ed enunciare il criterio del confronto per tali integrali.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle.

(3) Sia $f(x)$ una funzione limitata in $[0, 1]$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ è integrabile in $[0, 1]$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $f(x)$ ammette minimo in $[0, 1]$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. la successione $a_n = f(\frac{1}{n})$ è convergente $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Sia $f(x)$ funzione derivabile in $x_0 = 0$. Posto $g(x) = |f(x)|$, provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $g(x)$ è continua in $x_0 = 0$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $g(x)$ non è derivabile in $x_0 = 0$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa, si pensi alla funzione di Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in Q \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus Q \end{cases}$$

funzione limitata ma non integrabile in $[0, 1]$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È falsa. Ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ x & \text{se } x \in (0, 1] \end{cases}$$

è limitata ma non ammette minimo essendo $\inf_{x\in[0,1]} = 0$ ma $f(x) > 0$ per ogni $x \in [0, 1]$.

$\boxed{\textbf{C}}$ È falsa. Si consideri ad esempio la funzione limitata

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ \sin \frac{\pi}{2x} & \text{se } x \in (0, 1] \end{cases}$$

Allora la successione

$$a_n = f(\frac{1}{n}) = \sin(\frac{\pi}{2}n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \pm 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

è limitata ma non ammette limite per $n \to +\infty$.

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera. Infatti, essendo $f(x)$ derivabile in x_0, $f(x)$ risulterà continua in x_0. Inoltre essendo la funzione $|x|$ funzione continua in $\mathbb{R}$, otteniamo che la funzione composta $g(x) = |f(x)|$ risulta anch'essa continua in x_0.

$\boxed{\textbf{B}}$ È falsa. Considerata ad esempio la funzione $f(x) = x^2$, derivabile in $x_0 = 0$, si ha che $g(x) = |f(x)| = x^2$ è derivabile in $x_0 = 0$.

Analisi Matematica 1
seconda prova scritta del 23/03/2006

1) La successione $a_n = \dfrac{\sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) - \frac{1}{\sqrt{n}}}{(\sqrt{n+n^\alpha} - \sqrt{n})}$ diverge a $-\infty$

a per ogni $\alpha < 0$
b per ogni $\alpha < -1$
c per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$
d nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = x + \log(1-x)$

a ammette asintoto obliquo
b ammette due zeri
c è monotona crescente
d nessuna delle precedenti

3) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{x-\log(1+x)}{x^3} - \frac{1}{2x} & \text{se } x > 0 \\ \alpha & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ è continua nel punto $x = 0$

a per $\alpha = 0$
b per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$
c per $\alpha = \frac{1}{3}$
d nessuna delle precedenti

4) L'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 \log(1+x^\alpha)}\, dx$

a diverge per ogni $\alpha < 0$
b diverge per ogni $\alpha > 0$
c converge per ogni $\alpha > -1$
d nessuna delle precedenti

5) La somma di due numeri non negativi è n. Il valore massimo della somma dei loro quadrati è

a n^2
b $\frac{10n^2}{16}$
c $\frac{n^2}{2}$
d nessuna delle precedenti

6) L'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x(e^x+1)}\, dx$ vale

a 1
b $+\infty$
c $\log 2 - 1$
d nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Ricordando che $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ per $x \to 0$, per $n \to +\infty$ risulta

$$\sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) - \frac{1}{\sqrt{n}} \sim -\frac{1}{6n^{\frac{3}{2}}}$$

da cui

$$a_n \sim -\frac{1}{6n^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(\sqrt{n+n^\alpha} - \sqrt{n})} = -\frac{1}{6n^2} \frac{1}{(\sqrt{1+n^{\alpha-1}} - 1)}$$

Se $\alpha > 1$ allora

$$a_n \sim -\frac{1}{6n^{2+\frac{\alpha-1}{2}}} = -\frac{1}{6n^{\frac{3+\alpha}{2}}} \to 0$$

essendo $\alpha + 3 > 0$. Se $\alpha = 1$, allora

$$a_n \sim -\frac{1}{6n^2} \frac{1}{(\sqrt{2} - 1)} \to 0$$

Infine, se $\alpha < 1$, essendo $n^{\alpha-1} \to 0$ per $n \to +\infty$, dal limite notevole $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$ per $x \to 0$, otteniamo

$$a_n \sim -\frac{1}{6n^2} \frac{2}{n^{\alpha-1}} = -\frac{1}{3n^{\alpha+1}} \to \begin{cases} 0 & \text{se } 1 > \alpha > -1 \\ -\frac{1}{3} & \text{se } \alpha = -1 \\ -\infty & \text{se } \alpha < -1 \end{cases}$$

In alternativa si poteva procedere nel seguente modo

$$a_n \sim -\frac{1}{6n^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(\sqrt{n+n^\alpha} - \sqrt{n})} = -\frac{1}{6n^{\frac{3}{2}}} \frac{(\sqrt{n+n^\alpha} + \sqrt{n})}{n^\alpha} = -\frac{(\sqrt{n+n^\alpha} + \sqrt{n})}{6n^{\alpha+\frac{3}{2}}}$$

Se $\alpha < 1$ allora

$$a_n \sim -\frac{\sqrt{n}(\sqrt{1+n^{\alpha-1}} + 1)}{6n^{\alpha+\frac{3}{2}}} \sim -\frac{2}{6n^{\alpha+1}} \to \begin{cases} 0 & \text{se } 1 > \alpha > -1 \\ -\frac{1}{3} & \text{se } \alpha = -1 \\ -\infty & \text{se } \alpha < -1 \end{cases}$$

se $\alpha = 1$ allora

$$a_n \sim -\frac{\sqrt{n}(\sqrt{2} + 1)}{6n^{1+\frac{3}{2}}} = -\frac{\sqrt{2}+1}{6n^2} \to 0$$

mentre se $\alpha > 1$ allora

$$a_n \sim -\frac{n^{\frac{\alpha}{2}}(\sqrt{n^{1-\alpha}+1} + \sqrt{n^{1-\alpha}})}{6n^{\alpha+\frac{3}{2}}} \sim -\frac{1}{6n^{\alpha+\frac{3}{2}-\frac{\alpha}{2}}} = -\frac{1}{6n^{\frac{\alpha+3}{2}}} \to 0$$

essendo $\alpha + 3 > 0$.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. $f(x)$ è definita e continua in $(-\infty, 1)$ con

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x(1 + \frac{\log(1-x)}{x}) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

La funzione non ammette asintoto obliquo per $x \to -\infty$ essendo

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{\log(1-x)}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) - x = \lim_{x \to -\infty} \log(1-x) = -\infty$$

quindi $\boxed{a}$ è falsa Osserviamo poi che la funzione è derivabile in $(-\infty, 1)$ con

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{x-1} > 0 \iff x < 0$$

Ne segue che $f(x)$ è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$ e strettamente decrescente in $(0,1)$ (quindi $\boxed{c}$ è falsa) e che $x = 0$ è punto di massimo assoluto per $f(x)$ con $f(0) = 0$. Allora la funzione ammette uno ed un solo zero e $\boxed{b}$ è falsa.

(3) La risposta esatta è $\boxed{d}$. Infatti, ricordando che per $x \to 0$, $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \log(1+x)}{x^3} - \frac{1}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} - \frac{1}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x} - \frac{1}{3} + o(1) - \frac{1}{2x} = -\frac{1}{3}$$

Quindi la funzione data risulta continua se e solo se $\alpha = -\frac{1}{3}$.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{c}$. Infatti, se $\alpha > 0$ per $x \to +\infty$ abbiamo

$$f_\alpha(x) = \frac{\log x}{x^2 \log(1 + x^\alpha)} \sim \frac{\log x}{x^2 \log(x^\alpha)} = \frac{1}{\alpha x^2}$$

e quindi, dal criterio del confronto asintotico, $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)dx$ converge. Se $\alpha = 0$, allora $f_0(x) = \frac{\log x}{x^2 \log 2}$ e si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_0(x)}{\frac{1}{x^{3/2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^{\frac{1}{2}} \log 2} = 0$$

e quindi, dal criterio del confronto asintotico, $\int_1^{+\infty} f_0(x)dx$ converge. Infine, se $\alpha < 0$, essendo $x^\alpha \to 0$ per $x \to +\infty$ e ricordando che $\log(1 + y) \sim y$ per $y \to 0$, otteniamo

$$f_\alpha(x) = \frac{\log x}{x^2 \log(1 + x^\alpha)} \sim \frac{\log x}{x^{2+\alpha}}$$

quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_\alpha(x)}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^{2+\alpha-p}} = \begin{cases} 0 & \text{se } p < \alpha + 2 \\ +\infty & \text{se } p \geq \alpha + 2 \end{cases}$$

Se $\alpha > -1$, allora esisterà $p \in (1, \alpha + 2)$ ed il primo dei limiti sopra ci permette di concludere che in tal caso $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)dx$ converge. Se invece $\alpha \leq -1$ allora esisterà $p \in [\alpha + 2, 1]$ ed il secondo limite sopra ci permette di concludere che in tal caso $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)dx$ diverge.
Riunendo quanto ottenuto sopra si ha che l'integrale improprio converge per ogni $\alpha > -1$ e diverge per ogni $\alpha \leq -1$.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{a}$. Si vuole trovare il massimo della somma $x^2 + y^2$ al variare di $x \geq 0$ e $y \geq 0$ tali che $x + y = n$. Allora dovrà essere $y = n - x$ e cercheremo il massimo della funzione $f(x) = x^2 + (n - x)^2 = 2x^2 - 2nx + n^2$ al variare di $x \in [0, n]$.

Essendo $f(x)$ continua in $[0, n]$, dal Teorema di Weierstrass tale massimo esiste. Abbiamo che $f(x)$ risulta derivabile in $(0, n)$ con $f'(x) = 4x - 2n = 2(2x - n)$. Avremo allora che $f(x)$ risulta strettamente decrescente in $[0, \frac{n}{2}]$, strettamente crescente in $[\frac{n}{2}, n]$ e che $x = \frac{n}{2}$ è punto di minimo assoluto per $f(x)$ in

$[0,n]$ con $f(\frac{n}{2}) = \frac{n^2}{2}$. Il punto di massimo assoluto di $f(x)$ sarà allora un estremo dell'intervallo $[0,n]$. Poichè $f(0) = f(n) = n^2$, i punti $x = 0$ e $x = n$ sono entrambi punti di massimo assoluto per $f(x)$ in $[0,n]$ con valore massimo n^2.

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Operando la sostituzione $t = e^x$, da cui $x = \log t$ e $dx = \frac{dt}{t}$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{e^x(e^x+1)}dx &= \int \frac{1}{t^2(t+1)}dt = \int \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1}dt = -\frac{1}{t} - \log|t| + \log|t+1| + c \\
&= -\frac{1}{t} + \log|\frac{t+1}{t}| + c = -\frac{1}{e^x} + \log\frac{e^x+1}{e^x} + c
\end{aligned}$$

Allora

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x(e^x+1)}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{1}{e^x(e^x+1)}dx = \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{e^b} + \log\frac{e^b+1}{e^b} + 1 - \log 2 = 1 - \log 2$$

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica Biomedica e Meccanica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 11/04/2006

COGNOME ______________________ NOME ______________________

MATRICOLA ____

(1) Fornire la definizione di massimo relativo per una funzione. Fornire una condizione necessaria e una condizione sufficiente all'esistenza di un tale massimo.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di integrabilità delle funzioni monotone.

(3) Siano (a_n) e (b_n), (c_n) tre successioni reali tali che $a_n \leq b_n \leq c_n$ per ogni $n \in I\!N$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. se (a_n) e (c_n) sono regolari allora (b_n) è regolare. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. se (a_n) e (c_n) sono limitate allora (b_n) è limitata. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Siano $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ funzioni definite in $(0, +\infty)$ tali che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$. Supposto che $f(x) = o(h(x))$ e $g(x) = o(h(x))$ per $x \to +\infty$, provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. esiste $M > 0$ tale che $f(x) + g(x) \leq h(x)$ per ogni $x \geq M$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa, basta pensare alle successioni $a_n = -1$, $b_n = (-1)^n$ e $c_n = 1$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È vera. Infatti essendo (a_n) e (c_n) limitate, esistono $M_a,\ M_c \in \mathbb{R}$ tali che $|a_n| \leq M_a$ e $|c_n| \leq M_c$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si ottiene allora che $-M_a \leq a_n \leq b_n \leq c_n \leq M_c$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi che (b_n) risulta limitata.

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera. Infatti, essendo per ipotesi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$$

dalla definizione di limite, preso $\varepsilon = \frac{1}{2}$ esistono $M_1,\ M_2 > 0$ tali che $\frac{f(x)}{h(x)} < \frac{1}{2}$ per ogni $x > M_1$ e $\frac{g(x)}{h(x)} < \frac{1}{2}$ per ogni $x > M_2$. Allora, posto $M = \max\{M_1, M_2\}$, per ogni $x > M$ si avra' $\frac{f(x)}{h(x)} + \frac{g(x)}{h(x)} < 1$ e dunque $f(x) + g(x) < h(x)$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È falsa. E' sufficiente considerare ad esempio le funzioni $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{1}{x^3}$ e $h(x) = \frac{1}{x}$.

Analisi Matematica 1
seconda prova scritta del 20/04/2006

1) La successione $a_n = \dfrac{n^{2n}}{e^{n!}}$

$\boxed{\text{a}}$ converge a 0
$\boxed{\text{b}}$ diverge a $+\infty$
$\boxed{\text{c}}$ converge a 1
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = x(\log x - x)$

$\boxed{\text{a}}$ ammette asintoto obliquo
$\boxed{\text{b}}$ ha per immagine $(-\infty, 0)$
$\boxed{\text{c}}$ è monotona crescente
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

3) La funzione $f(x) = e^{2\sin x} - \sqrt{1+4x}$ per $x \to 0$ è un infinitesimo di ordine

$\boxed{\text{a}}$ 1
$\boxed{\text{b}}$ 4
$\boxed{\text{c}}$ 2
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

4) L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^\alpha \log(1+x)}\,dx$

$\boxed{\text{a}}$ diverge per ogni $\alpha < 0$
$\boxed{\text{b}}$ converge per ogni $\alpha < 2$
$\boxed{\text{c}}$ converge per ogni $\alpha > 1$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

5) Tra le aree di tutti i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio 1, quella massima è

$\boxed{\text{a}}$ 3
$\boxed{\text{b}}$ $\sqrt{3}$
$\boxed{\text{c}}$ $\sqrt{2}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

6) L'integrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\,dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $\frac{\pi}{2} - 1$
$\boxed{\text{b}}$ 1
$\boxed{\text{c}}$ $1 - \frac{\pi}{2}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, essendo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{2n+2}}{n^{2n}} \frac{e^{n!}}{e^{(n+1)!}} = (1+\frac{1}{n})^{2n}(n+1)^2 \frac{1}{e^{(n+1)!-n!}} = (1+\frac{2}{2n})^{2n}(n+1)^2 \frac{1}{e^{n!n}}$$

per $n \to +\infty$, dal limite notevole $(1+\frac{\alpha}{x_n})^{x_x} \to e^\alpha$ per ogni $\alpha \in I\!R$ e $x_n \to +\infty$, si ottiene $\frac{a_{n+1}}{a_n} \sim e^2 \frac{(n+1)^2}{e^{n!n}}$. Essendo infine

$$0 \leq e^2 \frac{(n+1)^2}{e^{n!n}} \leq e^2 \frac{(n+1)^2}{e^{n+1}} \quad \forall n \geq 2$$

e, dalla gerarchia degli infiniti, $\frac{(n+1)^2}{e^{n+1}} \to 0$, dal criterio del confronto deduciamo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 0$ e quindi, dal criterio del rapporto, che $a_n \to 0$.

In alternativa si poteva procedere direttamente osservando che

$$a_n = \frac{e^{2n \log n}}{e^{n!}} = \frac{1}{e^{n! - 2n \log n}}$$

e che $n! - 2n \log n = n!(1 - \frac{2n \log n}{n!}) \to +\infty$ essendo, per la gerarchia degli infiniti $\frac{n \log n}{n!} \to 0$.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. $f(x)$ è definita e continua in $(0, +\infty)$ con

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 (\frac{\log x}{x} - 1) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

Osserviamo poi che la funzione è derivabile in $(0, +\infty)$ con

$$f'(x) = \log x + 1 - 2x < -x < 0 \quad \forall x > 0$$

essendo $\log x$ funzione strettamente concava in $(0, +\infty)$ e $y = x - 1$ retta tangente al grafico di $\log x$ nel punto $x = 1$. Ne segue che $f(x)$ è strettamente decrescente in $(0, +\infty)$ e quindi che

$$\sup_{x>0} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \inf_{x>0} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Dal Teorema dei valori intermedi si deduce allora che $f(x)$ ha per immagine la semiretta $(-\infty, 0)$.

(3) La risposta esatta è $\boxed{\text{c}}$. Infatti, ricordando che per $y \to 0$, $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$, e che per $x \to 0$ $\sin x = x + o(x^2)$, si ottiene

$$\begin{aligned} e^{2 \sin x} &= 1 + 2 \sin x + \frac{4 \sin^2 x}{2} + o(\sin^2 x) = 1 + 2(x + o(x^2)) + 2(x + o(x^2))^2 + o((x + o(x^2))^2) \\ &= 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Ricordando inoltre che, per $y \to 0$, $\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2)$, si ottiene

$$\sqrt{1+4x} = 1 + \frac{1}{2}(4x) - \frac{1}{8}(16x^2) + o(x^2) = 1 + 2x - 2x^2 + o(x^2)$$

Quindi, per $x \to 0$ risulta $f(x) = 4x^2 + o(x^2)$ e dunque che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine 2.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, ricordando che per $x \to 0$ risulta $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ e $\log(1+x) \sim x$ si ottiene

$$f_\alpha(x) \sim \frac{x^2}{2x^\alpha x} = \frac{1}{2x^{\alpha-1}}$$

e quindi, dal criterio del confronto asintotico, $\int_0^1 f_\alpha(x)dx$ converge se e solo se $\alpha - 1 < 1$ ovvero se e solo se $\alpha < 2$.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Poniamo h l'altezza del triangolo e b la sua base. Posto $x = 1-h$, essendo il triangolo isoscele inscritto nella circonferenza di raggio 1, risulta $x \in [-1,1]$ e $(\frac{b}{2})^2 + x^2 = 1$. Si ottiene allora che $b = 2\sqrt{1-x^2}$ e cercheremo il massimo della funzione area $A(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2}$ al variare di $x \in [-1,1]$.

Essendo $A(x)$ continua in $[-1,1]$, dal Teorema di Weierstrass tale massimo esiste. Abbiamo che $A(x)$ risulta derivabile in $(-1,1)$ con

$$A'(x) = -\frac{2x^2+x-1}{\sqrt{1-x^2}} > 0 \iff x \in (-1, \frac{1}{2})$$

Avremo allora che $f(x)$ risulta strettamente crescente in $[-1, \frac{1}{2}]$, strettamente decrescente in $[\frac{1}{2}, 1]$ e che $x = \frac{1}{2}$ è punto di massimo assoluto per $A(x)$ in $[-1,1]$ con area massima $A(\frac{1}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. Si osservi che il triangolo di area massima è il triangolo equilatero di lato $b = \sqrt{3}$.

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Operando la sostituzione $t = \sin x$, da cui $dt = \cos x\, dx$, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\, dx &= \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt = \int_0^1 \frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \Big[\arcsin t + \sqrt{1-t^2}\,\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1\end{aligned}$$

In alternativa si poteva procedere direttamente nel seguente modo

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \frac{1-\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \sin x\ dx = [x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1\end{aligned}$$

Corsi di Laurea in Ingegneria Biomedica Elettronica e Meccanica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 20/06/2006

(1) Fornire la definizione ed un esempio di insieme superiormente limitato, di insieme inferiormente limitato e di insieme limitato.

(2) Enunciare e dimostrare il criterio di monotonia per funzioni derivabili.

(3) Sia $f(x)$ una funzione continua in $[-1, 1]$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ è derivabile in ogni $x_0 \in (-1, 1)$	Vero	Falso
B. $f(x)$ è limitata in $[-1, 1]$	Vero	Falso
C. la successione $a_n = f(\frac{1}{n})$ è convergente	Vero	Falso

(4) Sia $f(x)$ funzione derivabile e convessa in $\mathbb{R}$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ è monotona in $\mathbb{R}$	Vero	Falso
B. esiste $\lim_{x \to +\infty} f(x)$	Vero	Falso

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa, basta considerare la funzione $f(x) = |x|$, continua in $[-1, 1]$ ma non derivabile in $x_0 = 0$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È vera. Essendo la funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[-1, 1]$, dal Teorema di Weierstrass, esistono $x_1,\ x_2 \in [-1, 1]$ punti di massimo e di minimo per $f(x)$ in $[-1, 1]$. Posto $m = f(x_1)$ e $M = f(x_2)$, risulta allora $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [-1, 1]$ e quindi $f(x)$ limitata in $[-1, 1]$.

$\boxed{\textbf{C}}$ È vera. Essendo la funzione continua nel punto $x_0 = 0$, dalla definizione di funzione continua e dal Teorema "ponte" tra i limiti di funzione e di successione, si ha che $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(0)$ per ogni successione $x_n \to 0$ per $n \to +\infty$. In particolare, essendo $\frac{1}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$, avremo che esiste $\lim\limits_{n\to+\infty} f(\frac{1}{n}) = f(0)$.

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa, ad esempio la funzione $f(x) = x^2$ è convessa ma non monotona in $\mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È vera. Infatti, dalla definizione di funzione convessa, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha che

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

Se esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x_0) > 0$, dalla precedente diseguaglianza e dal Teorema del confronto, essendo $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = +\infty$ otteniamo che esiste $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Se invece $f'(x_0) \leq 0$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ avremo che $f(x)$ risulta decrescente in $\mathbb{R}$ e quindi esisterà $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \inf\limits_{\mathbb{R}} f(x)$.

Corsi di Laurea in Ingegneria Meccanica, Elettronica e Biomedica
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 23/06/2006

COGNOME ______________________ NOME ______________________

MATRICOLA ____

COGNOME ____

1) La successione $a_n = \dfrac{e^{n^\alpha} - 1}{(\sqrt{1+n^\alpha} - 1)}$ per $n \to +\infty$ diverge a $+\infty$

a per ogni $\alpha \in I\!R$
b per nessun $\alpha \in I\!R$
c per ogni $\alpha < 0$
d nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = e^{\sin x} - \sqrt{1+2x}$ per $x \to 0$ ha ordine di infinitesimo

a 1
b 2
c 3
d nessuna delle precedenti

3) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\alpha}{x} & \text{se } x > 0 \\ e^{\alpha x} - e^{-\alpha x} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ nel punto $x_0 = 0$

a è continua per ogni $\alpha \in I\!R$
b non è derivabile per ogni $\alpha > 0$
c è derivabile per ogni $\alpha > 0$
d nessuna delle precedenti

4) L'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{\alpha}{x}} - 1}{x^2 \log(1+x^\alpha)}\,dx$

a diverge per ogni $\alpha \in I\!R$
b converge per ogni $-2 < \alpha \leq 0$
c converge per ogni $\alpha > -2$
d nessuna delle precedenti

5) L'equazione $2\log 7x - 5\arctan x = \alpha$ ammette esattamente due soluzioni

a per ogni $\alpha \in I\!R$
b per un solo $\alpha \in I\!R$
c per nessun $\alpha \in I\!R$
d nessuna delle precedenti

6) L'integrale $\displaystyle\int_0^1 x^2 \arctan x\, dx$ vale

a $\log 2$
b $\frac{1}{6}(\log 2 - 1)$
c $\frac{1}{6}(\frac{\pi}{2} - 1 + \log 2)$
d nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Infatti se $\alpha < 0$, essendo $n^\alpha \to 0$, dai limiti notevoli per $n \to +\infty$ si ottiene

$$a_n \sim \frac{n^\alpha}{\frac{n^\alpha}{2}} = 2$$

Quindi se $\alpha < 0$, $a_n \to 2$ per $n \to +\infty$ e $\boxed{\text{a}}$ e $\boxed{\text{c}}$ sono false. Se $\alpha > 0$ allora

$$a_n \sim \frac{e^{n^\alpha}}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$$

Dalla gerarchia degli infiniti si ottiene allora che se $\alpha > 0$ allora $a_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$ e $\boxed{\text{b}}$ è falsa.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, ricordando che $\sin x = x + o(x^2)$ per $x \to 0$ e che $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ per $y \to 0$ otteniamo che

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + o(\sin^2 x) = \\ &= 1 + x + o(x^2) + \frac{1}{2}(x + o(x^2))^2 + o((x + o(x^2))^2) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Infine, essendo per $y \to 0$, $\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2)$, per $x \to 0$ abbiamo

$$\sqrt{1+2x} = 1 + x - \frac{1}{8}(2x)^2 + o(x^2) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

quindi

$$f(x) = e^{\sin x} - \sqrt{1+2x} + 1 = x^2 + o(x^2)$$

e $ord(f(x)) = 2$ per $x \to 0$.

(3) La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. Infatti, per la continuità in $x_0 = 0$, si ha che

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\alpha}{x} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } \alpha = 0 \\ \pi & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

mentre $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{\alpha x} - e^{-\alpha x} = 0 = f(0)$ per ogni $\alpha \in I\!R$. Quindi $f(x)$ risulta continua se e solo se $\alpha > 0$ e $\boxed{\text{a}}$ è falsa. Riguardo alla derivabilità, osserviamo che la funzione risulta derivabile in ogni $x \neq 0$ con

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2} & \text{se } x > 0 \\ \alpha(e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Risulta allora che $f(x)$ ammette derivata destra e sinistra in $x = 0$ con $f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \dfrac{1}{|\alpha|}$ e $f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 2\alpha$. La funzione risulterà derivabile in $x = 0$ se $\alpha > 0$ (per quanto sopra) e $\frac{1}{\alpha} = 2\alpha$, ovvero se e solo se $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Quindi $\boxed{\text{b}}$ e $\boxed{\text{c}}$ sono false.

(4) Le risposte esatte sono la $\boxed{\text{b}}$ e la $\boxed{\text{c}}$. Notiamo infatti che posto

$$f_\alpha(x) = \frac{e^{\frac{\alpha}{x}} - 1}{x^2 \log(1 + x^\alpha)},$$

si ha $f_\alpha(x) = 0$ se $\alpha = 0$ e quindi $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$ converge per $\alpha = 0$.
Se $\alpha \neq 0$, per $x \to +\infty$ dai limiti notevoli e dalle proprietà dei logaritmi, risulta

$$e^{\frac{\alpha}{x}} - 1 \sim \frac{\alpha}{x} \quad \text{mentre} \quad x^2 \log(1 + x^\alpha) \sim \begin{cases} x^{2+\alpha} & \text{se } \alpha < 0 \\ \alpha x^2 \log x & \text{se } \alpha > 0 \end{cases}$$

e quindi

$$f_\alpha(x) \sim \begin{cases} \frac{\alpha}{x^{3+\alpha}} & \text{se } \alpha < 0 \\ \frac{1}{x^3 \log x} & \text{se } \alpha > 0 \end{cases}$$

Dal criterio del confronto asintotico si ha allora che se $\alpha < 0$, l'integrale $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$ risulta convergente se e solo se $3 + \alpha > 1$ ovvero per $\alpha > -2$. Se $\alpha > 0$, abbiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_\alpha(x)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^3 \log x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x \log x} = 0$$

ed essendo $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ convergente, dal criterio del confronto asintotico deduciamo che anche l'integrale $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$ risulta convergente.
Riunendo quanto discusso sopra concludiamo che l'integrale dato converge se e solo se $\alpha > -2$.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Consideriamo la funzione $f(x) = 2\log 7x - 5\arctan x$ e studiamone l'immagine. La funzione è definita e continua in $(0, +\infty)$ con $\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$ mentre $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
La funzione risulta inoltre derivabile in $(0, +\infty)$ con

$$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{5}{1 + x^2} = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x(1 + x^2)} = \frac{2(x - 2)(x - \frac{1}{2})}{x(1 + x^2)}, \quad \forall x > 0.$$

Quindi $f'(x) > 0$ se $x \in (0, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$, $f'(x) < 0$ se $x \in (\frac{1}{2}, 2)$ e $f'(\frac{1}{2}) = f'(2) = 0$. Allora $f(x)$ risulta strettamente crescente in $(0, \frac{1}{2})$ e in $(2, +\infty)$, risulta strettamente decrescente in $(\frac{1}{2}, 2)$, $x = \frac{1}{2}$ risulta un punto di massimo relativo e $x = 2$ risulta un punto di minimo relativo. Posto $\alpha_m = f(2)$ e $\alpha_M = f(\frac{1}{2})$, dal Teorema dei valori intermedi concludiamo allora che l'equazione $f(x) = \alpha$ ammette una sola soluzione per ogni $\alpha < \alpha_m$ e $\alpha > \alpha_M$, due soluzioni per $\alpha = \alpha_m$ e $\alpha = \alpha_M$, tre soluzioni per $\alpha \in (\alpha_m, \alpha_M)$.

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, integrando per parti si ottiene

$$\int x^2 \arctan x\; dx = \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1 + x^2}\; dx = \frac{x^3}{3} \arctan x +$$
$$- \frac{1}{3}(\int x\; dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1 + x^2}\; dx) = \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6} \log(1 + x^2) + c$$

Quindi

$$\int_0^1 x^2 \arctan x\; dx = \left[\frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6} \log(1 + x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{6}(\frac{\pi}{2} - 1 + \log 2)$$

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 10/07/2006

(1) Fornire la formula di derivazione della funzione inversa e provare che $D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema della permanenza del segno.

(3) Sia $f(x)$ una funzione continua, positiva e strettamente decrescente in $[1, +\infty)$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ ammette massimo in $[1, +\infty)$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ esiste finito $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ è convergente $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Siano (a_n) e (b_n) due successioni regolari tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n - b_n = 0$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $e^{a_n} \sim e^{b_n}$ per $n \to +\infty$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. $\log(a_n) \sim \log(b_n)$ per $n \to +\infty$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera. Infatti, essendo la funzione decrescente in $[1,+\infty)$, risulta $f(1) \geq f(x)$ per ogni $x \geq 1$. Dunque $x = 1$ è punto di massimo assoluto per $f(x)$ in $[1,+\infty)$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È vera. Essendo la funzione decrescente in $[1,+\infty)$ abbiamo che esiste $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \inf_{x\in[1,+\infty)} f(x).$$

Essendo per ipotesi la funzione positiva, abbiamo inoltre che $\inf\limits_{x\in[1,+\infty)} f(x) \geq 0$ e dunque che il limite è finito.

$\boxed{\textbf{C}}$ È falsa. Ad esempio la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua, positiva e strettamente decrescente in $[1,+\infty)$ mentre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ risulta divergente.

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa. Si considerino ad esempio le successioni regolari $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n^2}$. Si ha che $a_n - b_n \to 0$ per $n \to +\infty$ mentre $\frac{a_n}{b_n} = n \to +\infty$

$\boxed{\textbf{B}}$ È vera. Infatti, dal limite notevole $e^{x_n} \to 1$ per ogni successione $x_n \to 0$, si ha che $\frac{e^{a_n}}{e^{b_n}} = e^{a_n - b_n} \to 1$.

$\boxed{\textbf{C}}$ È falsa. Le successioni regolari $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ e $b_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ sono tali che $a_n - b_n \to 0$ per $n \to +\infty$ mentre, dal limite notevole $\log(1 + x_n) \sim x_n$ per ogni successione $x_n \to 0$, otteniamo $\frac{\log(a_n)}{\log(b_n)} \sim n \to +\infty$

Corsi di Laurea in Ingegneria Meccanica, Elettronica e Biomedica
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 12/07/2006

COGNOME ______________________ NOME ______________________

MATRICOLA ______________________

CORSO DI LAUREA ______________________

1) La successione $a_n = \dfrac{\log(n+n^\alpha) - \log n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$ per $n \to +\infty$

[a] diverge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
[b] diverge per ogni $\alpha > \frac{1}{2}$
[c] converge per ogni $\alpha < 1$
[d] nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = e^{-x} \sin x - x \cos \sqrt{2x}$ per $x \to 0$ ha ordine di infinitesimo

[a] 1
[b] 2
[c] maggiore di 2
[d] nessuna delle precedenti

3) La funzione $f(x) = \begin{cases} \sin(\alpha x) - \frac{x}{x-1} & \text{se } x \geq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$ nel punto $x_0 = 0$

[a] è continua ma non derivabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
[b] non è derivabile per ogni $\alpha > 0$
[c] è derivabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
[d] nessuna delle precedenti

4) L'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\pi - 2\arctan x^\alpha}{x^2 \log x}\, dx$

[a] diverge per ogni $\alpha > 0$
[b] diverge per ogni $-2 < \alpha \leq 0$
[c] converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
[d] nessuna delle precedenti

5) L'equazione $\arcsin \sqrt{x} = \sqrt{1-x^2}$ ammette

[a] una sola soluzione
[b] due soluzioni
[c] nessuna soluzione
[d] nessuna delle precedenti

6) L'integrale $\displaystyle\int_0^1 x \arcsin x \; dx$ vale

[a] $\pi/4$
[b] $\pi/8$
[c] $1 - \pi/2$
[d] nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Studiamo innanzitutto il comportamento della successione $b_n = \log(n + n^\alpha) - \log n$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $\alpha > 1$, per $n \to +\infty$ si ottiene

$$b_n = (\alpha - 1)\log n + \log(1 + n^{1-\alpha}) \sim (\alpha - 1)\log n \to +\infty$$

essendo $n^{1-\alpha} \to 0$ e quindi $\log(1 + n^{1-\alpha}) \to 0$.
Se $\alpha = 1$ allora

$$b_n = \log(2n) - \log n = \log 2$$

per ogni n. Infine, se $\alpha < 1$, essendo $n^{\alpha-1} \to 0$, dal limite notevole $\log(1 + x_n) \sim x_n$ per ogni $x_n \to 0$, per $n \to +\infty$ otteniamo

$$b_n = \log(1 + n^{\alpha-1}) \sim n^{\alpha-1} \to 0$$

Osserviamo ora che, dal limite notevole $\sqrt{1 + x_n} - 1 \sim \frac{x_n}{2}$ per ogni $x_n \to 0$, abbiamo

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n}(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1) \sim \sqrt{n}\frac{1}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Allora, da quanto ottenuto sopra si ha

$$\alpha > 1 \quad \Longrightarrow \quad a_n \sim 2\sqrt{n}(1 - \alpha)\log n \to +\infty$$

$$\alpha = 1 \quad \Longrightarrow \quad a_n \sim 2\sqrt{n}\log 2 \to +\infty$$

$$\alpha < 1 \quad \Longrightarrow \quad a_n \sim 2\sqrt{n}n^{\alpha-1} = 2n^{\alpha-\frac{1}{2}} \to \begin{cases} +\infty & \text{se } \frac{1}{2} < \alpha < 1 \\ 2 & \text{se } \alpha = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{se } \alpha < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Riunendo quanto provato, abbiamo che la successione risulta divergente per ogni $\alpha > \frac{1}{2}$ e convergente per ogni $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, ricordando che $\sin x = x + o(x^2)$ per $x \to 0$ e che $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ per $y \to 0$ otteniamo che

$$e^{-x}\sin x = (1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2))(x + o(x^2)) = x - x^2 + o(x^2)$$

Inoltre, essendo per $y \to 0$, $\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^3)$, per $x \to 0$ abbiamo

$$x\cos\sqrt{2x} = x(1 - x + o(x)) = x - x^2 + o(x^2)$$

quindi $f(x) = o(x^2)$ e $ord(f(x)) > 2$ per $x \to 0$.

(3) La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. Infatti, per la continuità in $x_0 = 0$, si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sin(\alpha x) - \frac{x}{x-1} = 0 = f(0)$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ mentre $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$. Quindi $f(x)$ risulta continua per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Riguardo alla derivabilità, osserviamo che la funzione risulta derivabile in ogni $x \neq 0$ con

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha \cos(\alpha x) - \frac{1}{(x-1)^2} & \text{se } x > 0 \\ \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Risulta allora che $f(x)$ ammette derivata destra e sinistra in $x = 0$ con $f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \alpha - 1$ e $f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$. La funzione risulterà allora derivabile in $x_0 = 0$ se e solo se $\alpha = 1$. Quindi $\boxed{\text{a}}$, $\boxed{\text{b}}$ e $\boxed{\text{c}}$ sono false.

(4) Le risposte esatte è la $\boxed{\text{c}}$. Notiamo infatti che posto

$$f_\alpha(x) = \frac{\pi - 2\arctan(x^\alpha)}{x^2 \log x}\, dx,$$

per $x \to +\infty$, se $\alpha < 0$ risulta

$$f_\alpha(x) \sim \frac{\pi}{x^2 \log x}$$

mentre se $\alpha = 0$

$$f_\alpha(x) \sim \frac{\pi}{2x^2 \log x}$$

In entrambi i casi, essendo $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 \log x}\, dx$ convergente, dal criterio del confronto asintotico deduciamo che anche l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$ risulta convergente. Se invece $\alpha > 0$, essendo $\frac{\pi}{2} - \arctan(x^\alpha) = \arctan \frac{1}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^\alpha}$ per $x \to +\infty$, otteniamo che

$$f_\alpha(x) \sim \frac{2}{x^{2+\alpha} \log x}$$

ed essendo per $2 + \alpha > 1$, l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2+\alpha} \log x}\, dx$ risulta convergente e dunque, dal criterio del confronto asintotico, deduciamo che anche l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$ risulta convergente.
Riunendo quanto discusso sopra concludiamo che l'integrale dato converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Consideriamo la funzione $f(x) = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$ e cerchiamone gli zeri. La funzione è definita e continua in $[0, 1]$ con $f(0) = -1$ e $f(1) = \frac{\pi}{2}$. La funzione risulta inoltre derivabile in $(0, 1)$ con

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Essendo $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (0, 1)$, $f(x)$ risulta strettamente crescente in $(0, 1)$ e poichè $f(0) < 0$ e $f(1) > 0$, dal Teorema degli zeri concludiamo che la funzione ammette uno ed un solo zero.

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, integrando per parti si ottiene

$$\int_0^1 x \arcsin x\; dx = \left[\frac{x^2}{2} \arcsin x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\left[x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\arcsin x\right]_0^1 = \frac{\pi}{8}
\end{aligned}
$$

ricordando che, sempre integrando per parti,

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\ dx &= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\ dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx \\
&= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\ dx + \arcsin x
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\int \sqrt{1-x^2}\ dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + c
$$

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 del 10/07/2006

(1) Fornire la definizione di estremo superiore, la sua caratterizzazione ed enunciare il Teorema che ne garantisce l'esistenza.

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema fondamentale del calcolo integrale.

(3) Sia $f(x)$ una funzione derivabile in $x = 0$ con $f(0) = 0$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Siano (a_n) e (b_n) due successioni positive tali che la successione somma $(a_n + b_n)$ risulti convergente. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. (a_n) e (b_n) sono convergenti. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. (a_n) e (b_n) sono limitate. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\mathbf{A}}$ È vera. Infatti, essendo la funzione derivabile in $x = 0$ risulta anche continua in tale punto e dunque $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È falsa. Ad esempio la funzione $f(x) = \sin x$ è derivabile in $x = 0$ con $f(0) = 0$ mentre $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(4) $\boxed{\mathbf{A}}$ È falsa. Ad esempio le successioni $a_n = 1 + (-1)^n$ e $b_n = 1 - (-1)^n$ non sono regolari mentre si ha che $a_n + b_n = 2$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, e dunque che $(a_n + b_n)$ è convergente.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È vera. Infatti, essendo $(a_n + b_n)$ successione convergente, abbiamo che esiste $M > 0$ tale che $a_n + b_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poichè (a_n) e (b_n) sono positive, se ne deduce che $0 < a_n < a_n + b_n \leq M$ e $0 < b_n < a_n + b_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dunque che (a_n) e (b_n) sono limitate.

Corsi di Laurea in Ingegneria Biomedica, Elettronica e Meccanica
Seconda prova scritta di Analisi Matematica 1 del 20/09/2006

COGNOME ______________________ NOME ______________________

MATRICOLA ______________________

CORSO DI LAUREA ______________________

1) La successione $a_n = n^\alpha \left[(1+\frac{1}{n})e^{-\frac{1}{n}} - 1\right]$, diverge a $+\infty$

$\boxed{\text{a}}$ se $\alpha > 0$
$\boxed{\text{b}}$ se $\alpha > 2$
$\boxed{\text{c}}$ se $\alpha > 1$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

2) L'equazione $e^{-x}|x^2 - 1| = 1$ ammette un numero di soluzioni reali pari a

$\boxed{\text{a}}$ 1
$\boxed{\text{b}}$ 3
$\boxed{\text{c}}$ 2
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

3) Determinare per quali valori di α, $\beta \in \mathbb{R}$ è continua e derivabile in $x_0 = 0$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \log(1+\frac{1}{x}) + 1 & \text{se } x \geq 0 \\ \alpha e^{\frac{1}{x}} + \beta \arctan(\frac{1}{x}) & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

$\boxed{\text{a}}$ per ogni α e per $\beta = -\frac{2}{\pi}$
$\boxed{\text{b}}$ per $\alpha = 1$ e $\beta = 0$
$\boxed{\text{c}}$ per $\alpha = -1$ e per ogni β
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

4) L'integrale improprio $\int_0^1 (\frac{1}{x} - 1)^{2\alpha} \frac{1}{1-x}\, dx$

$\boxed{\text{a}}$ converge per ogni $\alpha < 1$
$\boxed{\text{b}}$ converge per $0 < \alpha < 1$
$\boxed{\text{c}}$ converge per ogni $\alpha > 0$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

5) La funzione $f(x) = e^x \cos x - \dfrac{1}{1-x}$ per $x \to 0$ è infinitesimo di ordine

$\boxed{\text{a}}$ 1
$\boxed{\text{b}}$ 3
$\boxed{\text{c}}$ 2
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

6) L'integrale $\int_0^1 x \arctan^2(x)\, dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $\frac{1}{64}\pi^2 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\log(4)$
$\boxed{\text{b}}$ $\frac{2}{64}\pi^2 - \frac{\pi}{16} + \frac{1}{4}\log(8)$
$\boxed{\text{c}}$ $\frac{3}{64}\pi^2 - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\log(2)$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Ricordando che $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$, posto $x = -\frac{1}{n}$, otteniamo

$$a_n = n^\alpha \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)-1\right] = n^\alpha\left(-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right) \sim -\frac{1}{2n^{2-\alpha}}$$

Ne concludiamo allora che $a_n \to -\infty$ se e solo se $\alpha > 2$

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Osserviamo che l'equazione data è equivalente a $f(x) = 0$ essendo $f(x) = e^- x|x^2-1| - 1$, sarà sufficiente determinare il numeri di zeri della funzione $f(x)$. La funzione è definita e continua in $I\!R$ con

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$$

Riguardo alla monotonia, osserviamo che la funzione è derivabile in ogni $x \in I\!R$ con $x \neq \pm 1$ con

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x}(x^2-2x-1) & \text{se } |x| > 1 \\ e^{-x}(x^2-2x-1) & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$$

Risulta $x^2 - 2x - 1 > 0$ se e solo se $x < 1-\sqrt{2}$ e $x > 1+\sqrt{2}$. Ne segue che:

- $f(x)$ è strettamente decrescente in $(-\infty, -1)$, $(1-\sqrt{2}, 1)$ e $(1+\sqrt{2}, +\infty)$;
- $f(x)$ è strettamente crescente in $(-1, 1-\sqrt{2})$ e $(1, 1+\sqrt{2})$;
- -1 e 1 sono minimi relativi per $f(x)$ con $f(\pm 1) = -1$;
- $1-\sqrt{2}$ e $1+\sqrt{2}$ sono massimi relativi per $f(x)$ con $f(1-\sqrt{2}) > 0$ e $f(1+\sqrt{2}) < 0$.

Se ne deduce che la funzione ammette uno ed un solo zero negli intervalli $(-\infty, -1)$, $(-1, 1-\sqrt{2})$ e $(1-\sqrt{2}, 1)$ e nessun zero nell' intervallo $(1, +\infty)$.

(3) La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. Infatti si ha

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} x^2\log(1+\frac{1}{x}) + 1 = \lim_{x\to0^+} x^2\log(1+x) - x\log x + 1 = 1$$

essendo $\lim\limits_{x\to0^+} x^a \log x = 0$ per ogni $a > 0$. Mentre

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \alpha e^{\frac{1}{x}} + \beta\arctan(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}\beta$$

Quindi la funzione risulterà continua se e solo se $\lim\limits_{x\to0^\pm} f(x) = f(0) = 1$ e dunque se $-\frac{\pi}{2}\beta = 1$ ovvero $\beta = -\frac{2}{\pi}$.
Riguardo alla derivabilità, si ha

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to0^+} x\log(1+\frac{1}{x}) = \lim_{x\to0^+} x\log(1+x) - x\log x = 0$$

quindi la funzione ammette derivata destra in $x = 0$ con $f'_+(0) = 0$. Mentre, osservato che la funzione risulta derivabile in ogni $x < 0$ con $f'(x) = -\frac{\alpha}{x^2}e^{\frac{1}{x}} - \frac{\beta}{1+x^2}$, otteniamo

$$\lim_{x\to0^-} f'(x) = \lim_{x\to0^-} -\frac{\alpha}{x^2}e^{\frac{1}{x}} - \frac{\beta}{1+x^2} = -\beta$$

essendo $\lim_{y\to-\infty} y^a e^y = 0$ per ogni $a > 0$. Quindi la funzione ammette derivata sinistra in $x = 0$ con $f'_-(0) = \beta$. Poichè la funzione risulta continua in $x = 0$ solo per $\beta = -\frac{2}{\pi}$, ne segue che la funzione non risulta derivabile in $x = 0$ qualunque sia $\alpha \in I\!R$.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. L'integrale risulta singolare in entrambi gli estremi di integrazione, quindi risultera' convergente se e solo se risultano tali gli integrali $\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{x}-1)^{2\alpha}\frac{1}{1-x}\,dx$ e $\int_{\frac{1}{2}}^1(\frac{1}{x}-1)^{2\alpha}\frac{1}{1-x}\,dx$. Per $x \to 0$ abbiamo

$$(\frac{1}{x}-1)^{2\alpha}\frac{1}{1-x} \sim (\frac{1}{x}-1)^{2\alpha} = (\frac{1-x}{x})^{2\alpha} \sim \frac{1}{x^{2\alpha}}$$

e quindi l'integrale $\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{x}-1)^{2\alpha}\frac{1}{1-x}\,dx$ converge se e solo se $2\alpha < 1$ ovvero $\alpha < \frac{1}{2}$.
Per $x \to 1$ abbiamo invece

$$(\frac{1}{x}-1)^{2\alpha}\frac{1}{1-x} = (\frac{1-x}{x})^{2\alpha}\frac{1}{1-x} \sim \frac{1}{(1-x)^{1-2\alpha}}$$

e quindi l'integrale $\int_{\frac{1}{2}}^1(\frac{1}{x}-1)^{2\alpha}\frac{1}{1-x}\,dx$ converge se e solo se $1-2\alpha < 1$ ovvero $\alpha > 0$.
L'integrale proposto risultera' allora convergente se e solo se $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, ricordando che per $x \to 0$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ e $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, otteniamo

$$e^x \cos x = (1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2))(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) = 1 + x + o(x^2).$$

Quindi, essendo $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$, risulta che

$$f(x) = e^x \cos x - \frac{1}{1-x} = -x^2 + o(x^2)$$

e dunque che la funzione ha ordine di infinitesimo pari a 2.

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Infatti inegrando per parti due volte otteniamo

$$\begin{aligned}
\int x \arctan^2 x dx &= \frac{x^2}{2}\arctan^2 x - \int x^2 \arctan x \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan^2 x - \int \arctan x\, dx + \int \arctan x \frac{1}{1+x^2}\, dx \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan^2 x - x\arctan x + \int \frac{x}{1+x^2} dx + \frac{1}{2}\arctan^2 x \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan^2 x - x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + \frac{1}{2}\arctan^2 x + c
\end{aligned}$$

Quindi, $\displaystyle\int_0^1 x \arctan^2 x\, dx = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2.$