Corso di Laurea in Scienze Biologiche
Prova scritta di Matematica (A) del 14/02/2006

1) Determinare $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1+5x} - \cos(2x) - \arctan(x)}{x^3}$.

Possibile svolgimento. Il limite proposto si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Calcoliamolo utilizzando ripetutamente il Teorema di de l'Hopital. Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+5x)^{\frac{1}{5}} - \cos(2x) - \arctan(x)}{x^3} =^{(H)} \lim_{x\to 0} \frac{(1+5x)^{-\frac{4}{5}} + 2\sin(2x) - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} \quad \left(= \left[\frac{0}{0}\right]\right)$$

$$=^{(H)} \lim_{x\to 0} \frac{-4(1+5x)^{-\frac{9}{5}} + 4\cos(2x) + \frac{2x}{(1+x^2)^2}}{6x} \quad \left(= \left[\frac{0}{0}\right]\right)$$

$$=^{(H)} \lim_{x\to 0} \frac{36(1+5x)^{-\frac{14}{5}} - 8\sin(2x) + \frac{2(1+x^2)^2 - 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4}}{6} = \frac{38}{6} = \frac{19}{3}.$$

In alternativa, dopo la prima applicazione del Teorema di de l'Hopital, si può raccogliere a fattor comune il termine $\frac{1}{1+x^2}$ ottenendo che

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{(1+5x)^{-\frac{4}{5}} + 2\sin(2x) - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} \lim_{x\to 0} \frac{(1+5x)^{-\frac{4}{5}}(1+x^2) + 2\sin(2x)(1+x^2) - 1}{3x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(1+5x)^{-\frac{4}{5}} + 2\sin(2x) - 1}{3x^2} + \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \left((1+5x)^{-\frac{4}{5}} + 2\sin(2x)\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(1+5x)^{-\frac{4}{5}} + 2\sin(2x) - 1}{3x^2} + \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Per calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{(1+5x)^{-\frac{4}{5}} + 2\sin(2x) - 1}{3x^2}$ notiamo che ci troviamo ancora di fronte ad una forma indeterminata di tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$. Applicando ad essa il Teorema di De l'Hopital, aggiungendo e togliendo 1 per ricondurci ai limiti notevoli, otteniamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{(1+5x)^{-\frac{4}{5}} + 2\sin(2x) - 1}{3x^2} &= {}^{(H)} \lim_{x\to 0} \frac{-4(1+5x)^{-\frac{9}{5}} + 4\cos(2x)}{6x} \\
&= -\frac{4}{6}\left[5 \lim_{x\to 0} \frac{(1+5x)^{-\frac{9}{5}} - 1}{5x} + 2 \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{2x}\right] = -\frac{4}{6}[-5\frac{9}{5}] = 6.
\end{aligned}$$

Il limite di partenza è dunque uguale a $6 + \frac{1}{3} = \frac{19}{3}$.

2) Determinare per quali valori di $\alpha, \beta \in I\!R$ è continua e derivabile in $x_0 = 0$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{e^{x^2}} & x > 0, \\ \alpha e^x + \beta\cos(x) & x \leq 0. \end{cases}$$

Possibile svolgimento. Osserviamo che $f(0) = \alpha + \beta = \lim_{x\to 0^-} f(x)$ per ogni $\alpha, \beta \in I\!R$. Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+1}{e^{x^2}} = 1.$$

Perciò la funzione data è continua in $x_0 = 0$ se e solo se $\alpha + \beta = 1$.

Calcoliamone la derivata in $I\!R \setminus \{0\}$. Per $x < 0$ si ha $f'(x) = \mathrm{D}(\alpha e^x + \beta\cos(x)) = \alpha e^x - \beta\sin(x)$, mentre per $x > 0$ si ha

$$f'(x) = \mathrm{D}\left(\frac{x+1}{e^{x^2}}\right) = \frac{e^{x^2} - 2x(x+1)e^{x^2}}{e^{2x^2}} = \frac{e^{x^2}(1-2x-2x^2)}{e^{2x^2}}.$$

Quindi abbiamo

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1-2x-2x^2}{e^{x^2}} & x > 0, \\ \alpha e^x - \beta\sin(x) & x < 0. \end{cases}$$

Si ha dunque $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \alpha$ per ogni $\alpha, \beta \in I\!R$ e inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-2x-2x^2}{e^{x^2}} = 1.$$

Ne deduciamo che la derivata destra e la derivata sinistra in $x_0 = 0$ sono uguali se e solo se $\alpha = 1$. Assunto allora $\alpha + \beta = 1$, condizione che garantisce la continuità in $x_0 = 0$ di f, la funzione f risulta derivabile in $x_0 = 0$ per $\alpha = 1$. Concludiamo allora che per $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ la funzione f è continua e derivabile in $x_0 = 0$ con $f'(0) = 1$.

3) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$\arctan(x) = \frac{x^2}{x^2+1}.$$

Possibile svolgimento. Si consideri la funzione $f : I\!R \to I\!R$, $f(x) = \arctan(x) - \dfrac{x^2}{x^2+1}$. Evidentemente x è una soluzione dell'equazione data se e solo se vale $f(x) = 0$. Quindi il problema proposto si riconduce alla determinazione degli zeri della funzione f.

Notiamo che f è continua e derivabile su $I\!R$. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} - 1 < 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\frac{\pi}{2} - 1 > 0.$$

Per il teorema degli zeri deduciamo che la funzione f ammette almeno uno zero in $I\!R$.

Per studiare la monotonia di f calcoliamone la derivata prima:

$$f'(x) = \mathrm{D}\left(\arctan(x) - \frac{x^2}{x^2+1}\right) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{2x(x^2+1) - 2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x}{(x^2+1)^2}.$$

Studiamone il segno. Osserviamo che il denominatore $(x^2+1)^2$ è sempre positivo, mentre il denominatore $x^2+1-2x = (x-1)^2$ si annulla solo per $x = 1$ ed è positivo per ogni $x \neq 1$. Se ne deduce che $f'(x) > 0$ per ogni $x \neq 1$ e $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in I\!R$.

In conclusione la funzione f è crescente su tutto $I\!R$, per cui f ammette un solo zero in $I\!R$. Dunque l'equazione data ha esattamente una soluzione.

Notiamo infine che, essendo $f(0) = 0$, l'unica soluzione dell'equazione data è $x = 0$.

4) Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x)\cos(2x)\, dx$.

Possibile svolgimento. Calcoliamo prima di tutto l'integrale indefinito $\int \sin(3x)\cos(2x)\ dx$ tramite integrazione per parti. Scegliamo $f(x) = \sin(3x)$ come fattore finito e $g'(x) = \cos(2x)$ come fattore differenziale. Si ha quindi $f'(x) = 3\cos(3x)$ e $g(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$. Ne segue

$$\int \sin(3x)\cos(2x)\ dx = \frac{1}{2}\sin(3x)\sin(2x) - \frac{3}{2}\int \cos(3x)\sin(2x)\ dx.$$

Analogamente,

$$\int \cos(3x)\sin(2x)\ dx = -\frac{1}{2}\cos(3x)\cos(2x) - \frac{3}{2}\int \sin(3x)\cos(2x)\ dx.$$

Da cui

$$-\frac{5}{4}\int \sin(3x)\cos(2x)\ dx = \frac{1}{2}\sin(3x)\sin(2x) + \frac{3}{4}\cos(3x)\cos(2x)$$

e

$$\int \sin(3x)\cos(2x)\ dx = -\frac{2}{5}\sin(3x)\sin(2x) - \frac{3}{5}\cos(3x)\cos(2x).$$

Passando infine all'integrale definito, si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x)\cos(2x)\ dx = \left[-\frac{2}{5}\sin(3x)\sin(2x) - \frac{3}{5}\cos(3x)\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3}{5}.$$

Notiamo che un altro possibile svolgimento di questo esercizio consiste nell'utilizzare la formula

$$\sin(\alpha x)\cos(\beta x) = \frac{1}{2}\left(\sin((\alpha+\beta)x) + \sin((\alpha-\beta)x)\right),$$

che permette di trasformare l'integrale indefinito $\int \sin(\alpha x)\cos(\beta x)\ dx$ nella somma di due integrali immediati. Nel nostro caso si ha

$$\sin(3x)\cos(2x) = \frac{1}{2}\left(\sin(5x) + \sin(x)\right).$$

Per esercizio calcolare l'integrale indefinito $\int \sin(3x)\cos(2x)\ dx$ con questo procedimento e verificare che si ottiene lo stesso risultato trovato nell'altro modo.

5) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{2\sin(2x)}{2+\cos(2x)}y(x) + \sin(x).$$

Possibile svolgimento. Calcoliamo prima di tutto l'integrale indefinito

$$-\int \frac{2\sin(2x)}{2+\cos(2x)}\ dx.$$

Si tratta di un integrale immediato in quanto $\mathrm{D}(2+\cos(2x)) = -2\sin(2x)$. Si ha dunque

$$-\int \frac{2\sin(2x)}{2+\cos(2x)}\ dx = \log(2+\cos(2x)).$$

Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione differenziale data per $\mathrm{e}^{\log(2+\cos(2x))} = 2+\cos(2x)$, si ottiene la seguente equazione ad essa equivalente:

$$\mathrm{D}(2+\cos(2x)y(x)) = (2+\cos(2x))\sin(x).$$

Ci siamo così ricondotti al calcolo dell'integrale

$$\int (2 + \cos(2x)) \sin(x)\ dx.$$

Tenendo conto che $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, si può trasformare questo integrale in un integrale immediato:

$$\int (2 + \cos(2x)) \sin(x)\ dx = \int (1 + 2\cos^2(x)) \sin(x)\ dx = -\cos(x) - \frac{2}{3}\cos^3(x) + c.$$

Infine l'integrale generale dell'equazione data è:

$$y(x) = \frac{-\cos(x) - \frac{2}{3}\cos^3(x) + c}{2 + \cos(2x)}.$$