Corso di Laurea in Scienze Biologiche
Prova in Itinere di Matematica – 20/12/2006

COGNOME ______________________ NOME ______________________

MATRICOLA ____

1.1) Determinare

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\mathrm{e}^{-2x} + 3\sin(2x) - 3}{2\sqrt{1+x^2} - 2}.$$

Possibile svolgimento. Il limite proposto si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Calcoliamolo utilizzando ripetutamente il Teorema di de l'Hopital. Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\mathrm{e}^{-2x} + 3\sin(2x) - 3}{2(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - 2} =^{(H)} \lim_{x\to 0} \frac{-6\mathrm{e}^{-2x} + 6\cos(2x)}{2x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}} \quad \left(= \left[\frac{0}{0}\right]\right)$$

$$=^{(H)} \lim_{x\to 0} \frac{12\mathrm{e}^{-2x} - 12\sin(2x)}{2(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - 2x^2(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}} = \frac{12}{2} = 6.$$

Osserviamo che il calcolo del limite precedente si può semplificare utilizzando le proprietà dei limiti e i limiti notevoli. Infatti, moltiplicando e dividendo per x^2, si possono calcolare separatamente i due limiti seguenti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\mathrm{e}^{-2x} + 3\sin(2x) - 3}{x^2} = 6 \text{ e } \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - 2} = 1.$$

Il primo limite si calcola facilmente con il Teorema di de l'Hopital e il secondo è un limite notevole (verificare per esercizio). Poiché il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti, si ritrova così il risultato di prima

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\mathrm{e}^{-2x} + 3\sin(2x) - 3}{2\sqrt{1+x^2} - 2} = 6$$

1.2) Per esercizio: verificare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\mathrm{e}^{-3x} + 2\sin(3x) - 2}{3\sqrt{1+x^2} - 3} = 6.$$

1.3) Determinare

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\log(1-x) + 2x\cos(x)}{\arctan(-x^2)}.$$

Possibile svolgimento. Il limite proposto si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Calcoliamolo utilizzando ripetutamente il Teorema di de l'Hopital. Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\log(1-x) + 2x\cos(x)}{\arctan(-x^2)} =^{(H)} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-2}{1-x} + 2\cos(x) - 2x\sin(x)}{\frac{-2x}{1+x^4}} \quad \left(= \left[\frac{0}{0}\right]\right)$$

$$=^{(H)} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-2}{(1-x)^2} - 4\sin(x) - 2x\cos(x)}{\frac{-2+6x^4}{(1+x^4)^2}} = 1.$$

Come prima, il calcolo del limite precedente si può semplificare utilizzando le proprietà dei limiti e i limiti notevoli. Infatti, moltiplicando e dividendo per x^2, si possono calcolare separatamente i due limiti seguenti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\log(1-x) + 2x\cos(x)}{x^2} = -1 \text{ e } \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\arctan(-x^2)} = -1.$$

Il primo limite si calcola facilmente con il Teorema di de l'Hopital e il secondo è un limite notevole (verificare per esercizio). Poiché il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti, si ritrova così il risultato di prima

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\log(1-x) + 2x\cos(x)}{\arctan(-x^2)} = 1.$$

1.4) Per esercizio: verificare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\log(1+x) - 2x\cos(x)}{\arctan(-x^2)} = -1.$$

2.1) Dire se è continua e derivabile in $x_0 = 0$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-3x} - e^{3x} + 6x}{x} & x < 0, \\ 0 & x = 0, \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0. \end{cases}$$

Possibile svolgimento. Osserviamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-3x} - e^{3x} + 6x}{x} \quad \left(= \left[\frac{0}{0}\right] \right) =^{(H)} \lim_{x\to 0} (-3e^{-3x} - 3e^{3x} + 6) = 0;$$

ne segue

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-3x} - e^{3x} + 6x}{x} = 0.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

(si tratta di un limite notevole). Abbiamo quindi $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ e perciò la funzione data è continua in $x_0 = 0$.

Calcoliamone la derivata in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per $x < 0$ si ha

$$f'(x) = D\left(\frac{e^{-3x} - e^{3x} + 6x}{x}\right) = \frac{(-3e^{-3x} - 3e^{3x} + 6)x - (e^{-3x} - e^{3x} + 6x)}{x^2}$$

$$= \frac{-3x(e^{-3x} + e^{3x}) - (e^{-3x} - e^{3x})}{x^2},$$

mentre per $x > 0$ si ha

$$f'(x) = D\left(e^{-\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Ne deduciamo

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-3x(\mathrm{e}^{-3x} + \mathrm{e}^{3x}) - (\mathrm{e}^{-3x} - \mathrm{e}^{3x})}{x^2} & x < 0, \\ \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & x > 0. \end{cases}$$

Calcoliamo ora il limite destro e sinistro di $f'(x)$ per $x \to 0$. Osserviamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{-3x(\mathrm{e}^{-3x} + \mathrm{e}^{3x}) - (\mathrm{e}^{-3x} - \mathrm{e}^{3x})}{x^2} \quad \left(= \left[\frac{0}{0}\right] \right)$$

$$=^{(H)} \lim_{x\to 0} \frac{-3(\mathrm{e}^{-3x} + \mathrm{e}^{3x}) - 3x(-3\mathrm{e}^{-3x} + 3\mathrm{e}^{3x}) - (-3\mathrm{e}^{-3x} - 3\mathrm{e}^{3x})}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{9(\mathrm{e}^{-3x} - \mathrm{e}^{3x})}{2} = 0$$

(qui sopra, prima di passare al limite, abbiamo diviso numeratore e denominatore per x). Si ha dunque

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-3x(\mathrm{e}^{-3x} + \mathrm{e}^{3x}) - (\mathrm{e}^{-3x} - \mathrm{e}^{3x})}{x^2} = 0.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 0.$$

Infatti, ponendo $y = \dfrac{1}{x}$, si ha che $x \to 0^+$ se e solo se $y \to +\infty$; sostituendo si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y\to +\infty} \frac{y^2}{\mathrm{e}^y} = 0$$

per la gerarchia degli infiniti.

Si ha quindi $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0 = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$. Ne segue che la funzione f è continua e derivabile in $x_0 = 0$ e risulta $f'(0) = 0$.

Per esercizio: giungere alla stessa conclusione applicando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale.

2.2) Per esercizio: verificare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{2x} + 4x}{x} & x < 0, \\ 0 & x = 0, \\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \end{cases}$$

è continua e derivabile in $x_0 = 0$ con $f'(0) = 0$.

2.3) Dire se è continua e derivabile in $x_0 = 0$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x\cos(x) - \sin(3x)}{x} & x < 0, \\ 0 & x = 0, \\ x^{\frac{3}{2}}\log(x) & x > 0. \end{cases}$$

Possibile svolgimento. Osserviamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x\cos(x) - \sin(3x)}{x} \quad \left(= \left[\frac{0}{0}\right] \right) =^{(H)} \lim_{x\to 0} (3\cos(x) - 3x\sin(x) - 3\cos(3x)) = 0;$$

ne segue

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{3x\cos(x)-\sin(3x)}{x} = 0.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{2}}\log(x) = 0$$

(si tratta del limite notevole $\lim_{x\to 0^+} x^b \log x = 0$ che vale per ogni $b > 0$). Abbiamo quindi $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ e perciò la funzione data è continua in $x_0 = 0$.

Calcoliamone la derivata in $I\!R \setminus \{0\}$. Per $x < 0$ si ha

$$f'(x) = \mathrm{D}\left(\frac{3x\cos(x)-\sin(3x)}{x}\right) = \frac{(3\cos(x)-3x\sin(x)-3\cos(3x))x-(3x\cos(x)-\sin(3x))}{x^2}$$

$$= \frac{-3x^2\sin(x)-3x\cos(3x)+\sin(3x)}{x^2},$$

mentre per $x > 0$ si ha

$$f'(x) = \mathrm{D}\left(x^{\frac{3}{2}}\log(x)\right) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\log(x) + x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}\log(x)+1\right).$$

Ne deduciamo

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-3x^2\sin(x)-3x\cos(3x)+\sin(3x)}{x^2} & x < 0, \\ x^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{3}{2}\log(x)+1\right) & x > 0. \end{cases}$$

Calcoliamo adesso il limite destro e sinistro di $f'(x)$ per $x \to 0$. Osserviamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{-3x^2\sin(x)-3x\cos(3x)+\sin(3x)}{x^2} \quad \left(=\left[\frac{0}{0}\right]\right)$$

$$=^{(H)} \lim_{x\to 0} \frac{-6x\sin(x)-3x^2\cos(x)+9x\sin(3x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-6\sin(x)-3x\cos(x)+9\sin(3x)}{2} = 0$$

(qui sopra, prima di passare al limite, abbiamo diviso numeratore e denominatore per x). Si ha dunque

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-3x^2\sin(x)-3x\cos(3x)+\sin(3x)}{x^2} = 0.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\log(x) + x^{\frac{1}{2}} = 0$$

(come prima, si tratta di un limite notevole).

Si ha quindi $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0 = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$, e perciò la funzione f è continua e derivabile in $x_0 = 0$ e risulta $f'(0) = 0$.

Per esercizio: giungere alla stessa conclusione applicando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale.

2.4) Per esercizio: verificare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x\cos(x)-\sin(2x)}{x} & x < 0, \\ 0 & x = 0, \\ x^{\frac{3}{2}}\log(x) & x > 0 \end{cases}$$

è continua e derivabile in $x_0 = 0$ con $f'(0) = 0$.

3.1) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$(x-5)^2 e^{(x-5)} = 1.$$

Possibile svolgimento. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = (x-5)^2 e^{(x-5)}.$$

Abbiamo allora che x è una soluzione dell'equazione data se e solo se

$$f(x) = 1.$$

Quindi il problema proposto si riconduce alla determinazione delle intersezioni del grafico della funzione $y = f(x)$ con la retta orizzontale $y = 1$.

Evidentemente la funzione f è continua e derivabile su $\mathbb{R}$. Studiamone il segno: essendo $e^{(x-5)} > 0$ per ogni x, si ha $f(x) \geq 0$ per ogni x e $f(x) = 0$ se e solo se $(x-5)^2 = 0$, ovvero $x = 5$. Inoltre $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ per la gerarchia degli infiniti.

Per studiare la monotonia di f calcoliamone la derivata prima. Si ha

$$f'(x) = \mathrm{D}\left((x^2 - 10x + 25)e^{(x-5)}\right) = (x^2 - 10x + 25 + 2x - 10)e^{(x-5)} = (x^2 - 8x + 15)e^{(x-5)}$$

Studiamo il segno di $f'(x)$. Osserviamo che $e^{(x-5)}$ è positivo per ogni x, e quindi $f'(x)$ ha lo stesso segno di $x^2 - 8x + 15 = (x-3)(x-5)$. Abbiamo così $f'(x) > 0$ per $x < 3$ o $x > 5$; $f'(x) < 0$ per $3 < x < 5$; $f'(x) = 0$ per $x = 3$ e $x = 5$. Perciò la funzione f è crescente nei due intervalli illimitati $(-\infty, 3)$ e $(5, +\infty)$, ed è decrescente in $(3, 5)$. Ne segue che per $x = 3$ la funzione data ammette un valore massimo relativo dato da $f(3) = 4e^{-2}$, mentre per $x = 5$ la funzione data ammette il valore minimo (assoluto) dato da $f(5) = 0$.

Un semplice studio del grafico permette di determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione

$$(x-5)^2 e^{(x-5)} = \alpha.$$

Si ha infatti:

- $\alpha < 0 \Rightarrow$ non ci sono soluzioni;
- $\alpha = 0 \Rightarrow$ c'è una sola soluzione ($x = 5$);
- $0 < \alpha < 4e^{-2} \Rightarrow$ ci sono 3 soluzioni;
- $\alpha = 4e^{-2} \Rightarrow$ ci sono 2 soluzioni;
- $\alpha > 4e^{-2} \Rightarrow$ c'è una sola soluzione.

Per rispondere alla domanda proposta è ora sufficiente confrontare i due valori 1 e $4e^{-2}$. Ma $2 < e < 3$ implica $4 < e^2 < 9$, da cui $\frac{1}{9} < e^{-2} < \frac{1}{4}$ e $\frac{4}{9} < 4e^{-2} < 1$. In particolare ne deduciamo $4e^{-2} < 1$, da cui segue che l'equazione

$$(x-5)^2 e^{(x-5)} = 1$$

ha una sola soluzione.

3.2) Per esercizio: determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$(x-7)^2 e^{(x-7)} = 1.$$

3.3) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$4x^2 e^{-2x} = 1.$$

Possibile svolgimento. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = 4x^2 e^{-2x}.$$

Abbiamo allora che x è una soluzione dell'equazione data se e solo se

$$f(x) = 1.$$

Quindi il problema proposto si riconduce alla determinazione delle intersezioni del grafico della funzione $y = f(x)$ con la retta orizzontale di equazione $y = 1$.

Evidentemente la funzione f è continua e derivabile su $\mathbb{R}$. Studiamone il segno: essendo $e^{-2x} > 0$ per ogni x, si ha $f(x) \geq 0$ per ogni x e $f(x) = 0$ se e solo se $4x^2 = 0$, ovvero $x = 0$. Abbiamo poi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ per la gerarchia degli infiniti e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Per studiare la monotonia di f calcoliamone la derivata prima. Si ha

$$f'(x) = \mathrm{D}\left(4x^2 e^{-2x}\right) = 8x e^{-2x} - 8x^2 e^{-2x} = 8x(1-x)e^{-2x}.$$

Studiamo il segno di $f'(x)$. Osserviamo che e^{-2x} è positivo per ogni x, e quindi $f'(x)$ ha lo stesso segno di $x - x^2 = x(1-x)$. Abbiamo così $f'(x) > 0$ per $0 < x < 1$; $f'(x) < 0$ per $x < 0$ o $x > 1$; $f'(x) = 0$ per $x = 0$ e $x = 1$. Perciò la funzione f è crescente nell'intervallo $(0, 1)$ ed è decrescente nei due intervalli illimitati $(-\infty, 0)$ e $(1, +\infty)$. Ne segue che per $x = 0$ la funzione data ammette il valore minimo (assoluto) dato da $f(0) = 0$, mentre mentre per $x = 1$ la funzione data ammette il valore massimo relativo dato da $f(1) = 4e^{-2}$.

Un semplice studio del grafico permette di determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione

$$4x^2 e^{-2x} = \alpha.$$

Si ha infatti:

- $\alpha < 0 \Rightarrow$ non ci sono soluzioni;
- $\alpha = 0 \Rightarrow$ c'è una sola soluzione ($x = 0$);
- $0 < \alpha < 4e^{-2} \Rightarrow$ ci sono 3 soluzioni;
- $\alpha = 4e^{-2} \Rightarrow$ ci sono 2 soluzioni;
- $\alpha > 4e^{-2} \Rightarrow$ c'è una sola soluzione.

D'altra parte, come già osservato, si ha $4e^{-2} < 1$, da cui segue che l'equazione proposta

$$4x^2 e^{-2x} = 1$$

ha una sola soluzione.

3.4) Per esercizio: determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$9x^2 e^{-3x} = 1.$$