Corso di Laurea in Scienze Biologiche
Prova scritta di Matematica (A) del 03/02/2006

COGNOME ______________________ NOME ______________________

MATRICOLA ______________________

1) Determinare
$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}+\sin(x)}{x^3}$.

Possibile svolgimento. Il limite proposto si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Calcoliamolo utilizzando ripetutamente il Teorema di de l'Hopital. Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}-(1+x)^{\frac{1}{2}}+\sin(x)}{x^3} =^{(H)} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}+\cos(x)}{3x^2} \quad \left(=\left[\frac{0}{0}\right]\right)$$

$$=^{(H)} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{4}(1-x)^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}-\sin(x)}{6x} \quad \left(=\left[\frac{0}{0}\right]\right)$$

$$=^{(H)} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{8}(1-x)^{-\frac{5}{2}}+\frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}-\cos(x)}{6} = \frac{\frac{3}{8}+\frac{3}{8}-1}{6} = -\frac{1}{24}.$$

2) Determinare per quali valori di $\alpha \in I\!R$ è continua e per quali derivabile in $x_0 = 0$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arcsin(1-x^2) & x > 0, \\ \sin(\alpha x) & x \le 0. \end{cases}$$

Possibile svolgimento. Osserviamo che $f(0) = 0 = \lim_{x\to 0^-} f(x)$ per ogni $\alpha \in I\!R$. Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(1-x^2)\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Perciò la funzione data è continua in $x_0 = 0$ per ogni $\alpha \in I\!R$. Calcoliamone la derivata in $I\!R \setminus \{0\}$. Per $x < 0$ si ha $f'(x) = \mathrm{D}(\sin(\alpha x)) = \alpha\cos(\alpha x)$, mentre per $x > 0$ si ha

$$f'(x) = \mathrm{D}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(1-x^2)\right) = \frac{-(-2x)}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}} = \frac{2x}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

Quindi abbiamo

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{2x-x^2}} & x > 0, \\ \alpha\cos(\alpha x) & x < 0. \end{cases}$$

Si ha dunque $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \alpha$ per ogni $\alpha \in I\!R$ e inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{\sqrt{x(2-x)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}} = 0.$$

Ne deduciamo che la derivata destra e la derivata sinistra in $x_0 = 0$ sono uguali se e solo se $\alpha = 0$. Concludiamo allora che per $\alpha = 0$ la funzione f è continua e derivabile in $x_0 = 0$ con $f'(0) = 0$.

3) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$\arctan(e^x) = x.$$

Possibile svolgimento. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \arctan(e^x)$. Evidentemente x è una soluzione dell'equazione data se e solo se vale $f(x) = 0$. Quindi il problema proposto si riconduce alla determinazione degli zeri della funzione f.

Notiamo che f è continua e derivabile su $\mathbb{R}$. Inoltre, essendo $0 < \arctan(e^x) < \frac{\pi}{2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Per il teorema degli zeri deduciamo che la funzione f ammette almeno uno zero in $\mathbb{R}$.

Per studiare la monotonia di f calcoliamone la derivata prima:

$$f'(x) = \mathrm{D}\left(x - \arctan(e^x)\right) = 1 - \frac{e^x}{e^{2x} + 1} = \frac{e^{2x} - e^x + 1}{e^{2x} + 1}.$$

Studiamone il segno. Osserviamo che il denominatore $e^{2x} + 1$ è sempre positivo, ed anche il denominatore $e^{2x} - e^x + 1$ è positivo per ogni $x \in \mathbb{R}$ (verificare per esercizio). Se ne deduce che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Quindi la funzione f è (strettamente) crescente su tutto $\mathbb{R}$, per cui f ammette un solo zero in $\mathbb{R}$. Dunque l'equazione data ha esattamente una soluzione.

Notiamo infine che, essendo $f(0) = 0 - \arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$, l'unica soluzione x_0 dell'equazione data è positiva, cioè si ha $x_0 > 0$.

4) Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^{2x} + 1}\, dx$.

Possibile svolgimento. Calcoliamo prima di tutto l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x} + 1}\, dx$ tramite la sostituzione razionalizzante $y = e^x$. Si ha $dy = e^x\, dx$ e perciò

$$\int \frac{1}{e^{2x} + 1}\, dx = \int \frac{1}{y(y^2 + 1)}\, dy.$$

Per calcolare l'integrale della funzione razionale $\dfrac{1}{y(y^2 + 1)}$, determiniamo $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{y(y^2 + 1)} = \frac{A}{y} + \frac{2yB + C}{y^2 + 1}.$$

Si ottiene $A = 1$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = 0$ e quindi

$$\int \frac{1}{y(y^2 + 1)}\, dy = \log|y| - \frac{1}{2}\log(y^2 + 1) + c.$$

Tornando alla variabile x si ottiene

$$\int \frac{1}{e^{2x} + 1}\, dx = x - \frac{1}{2}\log(e^{2x} + 1) + c.$$

Passando infine all'integrale definito, si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{e^{2x}+1}\, dx = 1 - \frac{1}{2}\log(e^2+1) - \frac{1}{2}\log(2) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{2e^2}{e^2+1}\right)$$

per le proprietà dei logaritmi (verificare per esercizio).

In alternativa si poteva operare il cambiamento di variabile $y = e^x$ nell'integrale definito ottenendo

$$\int_0^1 \frac{1}{e^{2x}+1}\, dx = \int_1^e \frac{1}{y(y^2+1)}\, dy = \frac{1}{2}\log\left(\frac{2e^2}{e^2+1}\right)$$

(verificare per esercizio).

5) Determinare l'integrale generale in $(1, +\infty)$ dell'equazione differenziale

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{x\log(x)} + 1.$$

Possibile svolgimento. Calcoliamo prima di tutto l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{x\log(x)}\, dx.$$

Si tratta di un integrale immediato in quanto $\mathrm{D}(\log(x)) = \dfrac{1}{x}$. Si ha dunque

$$\int \frac{1}{x\log(x)}\, dx = \log|\log(x)|$$

(attenzione al modulo!). Tenendo conto del fatto che x appartiene all'intervallo $(1, +\infty)$, e che $\log(x) > 0$ per ogni $x \in (1, +\infty)$, possiamo liberarci del valore assoluto:

$$\int \frac{1}{x\log(x)}\, dx = \log|\log(x)| = \log(\log(x)).$$

Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione differenziale data per $e^{\log(\log(x))} = \log(x)$, si ottiene la seguente equazione ad essa equivalente:

$$\mathrm{D}(\log(x)y(x)) = \log(x).$$

Ci siamo così ricondotti al calcolo dell'integrale

$$\int \log(x)\, dx.$$

Calcoliamolo tramite integrazione per parti, scegliendo $f(x) = \log(x)$ come fattore finito e $g'(x) = 1$ come fattore differenziale. Si ha quindi $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g(x) = x$, da cui $f'(x)g(x) = \dfrac{1}{x}x = 1$. Ne segue

$$\int \log(x)\, dx = x\log(x) - \int 1\, dx = x\log(x) - x + c = x(\log(x) - 1) + c.$$

Infine l'integrale generale dell'equazione data in $(1, +\infty)$ è:

$$y(x) = \frac{x(\log(x) - 1) + c}{\log(x)}.$$