**Corso di Laurea in Scienze Biologiche**
**Prova in Itinere di Matematica – 21/12/2005**

COGNOME ______________________ NOME ______________________

MATRICOLA ______________________________________________

**1.1)** Determinare

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 2\sqrt{1+x^2} + 1}{x^4}.$$

*Possibile svolgimento.* Il limite proposto si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Calcoliamolo utilizzando ripetutamente il Teorema di de l'Hopital. Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 2(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + 1}{x^4} =^{(H)} \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2} - 2x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{4x^3} \quad \left(= \left[\frac{0}{0}\right]\right).$$

Conviene semplificare l'ultima frazione, dividendo numeratore e denominatore per $2x$:

$$\frac{2xe^{x^2} - 2x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{4x^3} = \frac{e^{x^2} - (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{2x^2}.$$

Applicando ancora il Teorema di de l'Hopital si trova

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{2x^2} =^{(H)} \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2} + x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{x^2} + (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}}{4} = \frac{3}{4}.$$

Qui sopra, prima di passare al limite, abbiamo diviso numeratore e denominatore per $x$.

Osserviamo che il limite precedente si può calcolare in alternativa utilizzando i limiti notevoli. Occorre prima sommare e sottrarre 1 al numeratore:

$$\frac{e^{x^2} - (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{2x^2} = \frac{e^{x^2} - 1 + 1 - (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{2x^2} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\right) - \left(\frac{(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - 1}{x^2}\right)\right).$$

Infatti passando al limite si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{2x^2} = \frac{1}{2}\left(\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\right) - \left(\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - 1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{3}{4}.$$

**1.2) Per esercizio:** verificare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \log(1+x^2) - 1}{x^3} = 0.$$

**1.3)** Determinare
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2\cos(x) - 2x^2}{x^4}.$$
Il limite proposto si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Calcoliamolo utilizzando ripetutamente il Teorema di de l'Hopital. Si ha
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2\cos(x) - 2x^2}{x^4} &=^{(H)} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} + 2\sin(x) - 4x}{4x^3} \quad \left(= \left[\frac{0}{0}\right]\right) \\
&=^{(H)} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} + 2\cos(x) - 4}{12x^2} \quad \left(= \left[\frac{0}{0}\right]\right) \\
&=^{(H)} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2\sin(x)}{24x} \quad \left(= \left[\frac{0}{0}\right]\right) \\
&=^{(H)} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2\cos(x)}{24} = 0.
\end{aligned}$$

**1.4) Per esercizio:** verificare che
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2\sin(x) - \frac{2}{3}x^3}{x^4} = 0.$$

**2.1)** Dire se è continua e derivabile in $x_0 = 0$ la funzione
$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & x > 0, \\ 1 + \sin(\frac{x}{2}) & x \le 0 \end{cases}$$

*Possibile svolgimento.* Osserviamo che $f(0) = 1 = \lim_{x\to 0^-} f(x)$ e
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$
Perciò la funzione data è continua in $x_0 = 0$. Calcoliamone la derivata in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per $x < 0$ si ha
$$f'(x) = D\left(1 + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right),$$
mentre per $x > 0$ si ha
$$f'(x) = D\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}.$$
Ne deduciamo
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2} & x > 0, \\ \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) & x < 0. \end{cases}$$
Si ha dunque $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{1}{2}$ e
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} \quad \left(= \left[\frac{0}{0}\right]\right) =^{(H)} \lim_{x\to 0^+} \frac{xe^x}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$
Ne segue che la derivata destra e la derivata sinistra in $x_0 = 0$ sono uguali. Perciò la funzione $f$ è continua e derivabile in $x_0 = 0$ e risulta $f'(0) = \frac{1}{2}$.

**2.2) Per esercizio:** verificare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & x > 0, \\ 1 + \tan(\frac{x}{2}) & x \leq 0 \end{cases}$$

è continua e derivabile in $x_0 = 0$ con $f'(0) = \frac{1}{2}$.

**2.3)** Dire se è continua e derivabile in $x_0 = 0$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan(-\frac{1}{x}) & x > 0, \\ e^{-x} - 1 + \pi & x \leq 0 \end{cases}$$

*Possibile svolgimento.* Osserviamo che $f(0) = \pi = \lim_{x\to 0^-} f(x)$ e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\pi}{2} - \arctan\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi,$$

ricordando che $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$ e inoltre $\displaystyle\lim_{y\to -\infty} \arctan(y) = -\frac{\pi}{2}$. Perciò la funzione data è continua in $x_0 = 0$.

Calcoliamone la derivata in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per $x < 0$ si ha $f'(x) = \mathrm{D}\left(e^{-x} - 1 + \pi\right) = -e^{-x}$, mentre per $x > 0$ si ha

$$f'(x) = \mathrm{D}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(-\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Ne deduciamo

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{1 + x^2} & x > 0, \\ -e^{-x} & x < 0. \end{cases}$$

Si ha evidentemente $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -1 = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$, e quindi la funzione $f$ è continua e derivabile in $x_0 = 0$ e risulta $f'(0) = -1$.

**2.4) Per esercizio:** verificare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1}{x}) & x > 0, \\ -e^{-x} + 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

è continua e derivabile in $x_0 = 0$ con $f'(0) = 1$.

**3.1)** Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione

$$e^{-x^2} = \frac{\alpha}{x^2 + 1}.$$

*Possibile svolgimento.* È conveniente scrivere l'equazione data nella forma equivalente

$$\frac{x^2 + 1}{e^{x^2}} = \alpha.$$

Si consideri ora la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^{x^2}}.$$

Evidentemente $x$ è una soluzione dell'equazione data se e solo se

$$f(x) = \alpha.$$

Quindi il problema proposto si riconduce alla determinazione delle intersezioni del grafico della funzione $y = f(x)$ con la retta orizzontale $y = \alpha$ al variare di $\alpha$ in $\mathbb{R}$.

Notiamo che per ogni $x$ vale l'uguaglianza $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x^2}$.

Evidentemente la funzione $f$ è continua e derivabile su $\mathbb{R}$. Inoltre $f(x) > 0$ per ogni $x$ e di conseguenza possiamo dire che non ci sono soluzioni quando $\alpha$ è negativo o nullo. Abbiamo poi, per la gerarchia degli infiniti,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Per studiare la monotonia di $f$ calcoliamone la derivata prima. Si ha

$$f'(x) = \mathrm{D}\left((x^2 + 1)e^{-x^2}\right) = 2xe^{-x^2} - 2x(x^2 + 1)e^{-x^2} = -2x^3e^{-x^2}.$$

Studiamo il segno di $f'(x)$. Osserviamo che $e^{-x^2}$ è positivo per ogni $x$, e quindi $f'(x)$ ha lo stesso segno di $-x^3$. Abbiamo così $f'(x) > 0$ per $x < 0$, $f'(x) < 0$ per $x > 0$ e $f'(x) = 0$ per $x = 0$. Perciò la funzione $f$ è crescente nell'intervallo $(-\infty, 0)$ ed è decrescente in $(0, +\infty)$. Per $x = 0$ la funzione data ammette il valore massimo (assoluto) dato da $f(0) = 1$.

Un semplice studio del grafico mostra che l'equazione $f(x) = \alpha$ non ammette soluzioni se $\alpha > 1$ (e inoltre se $\alpha \le 0$ come già osservato); ha solo la soluzione $x = 0$ per $\alpha = 1$; ha due soluzioni (simmetriche) se $0 < \alpha < 1$.

Riassumendo possiamo concludere quanto segue:

- $\alpha \le 0 \Rightarrow$ non ci sono soluzioni;
- $0 < \alpha < 1 \Rightarrow$ ci sono 2 soluzioni;
- $\alpha = 1 \Rightarrow$ c'è una sola soluzione $(x = 0)$;
- $\alpha > 1 \Rightarrow$ non ci sono soluzioni.

**3.2) Per esercizio:** determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione

$$e^{x^2} = \alpha(x^2 + 1)$$

verificando che

- $\alpha < 1 \Rightarrow$ non ci sono soluzioni;
- $\alpha = 1 \Rightarrow$ c'è una sola soluzione $(x = 0)$;
- $\alpha > 1 \Rightarrow$ ci sono 2 soluzioni.

*Suggerimento.* Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{e^{x^2}}{x^2 + 1}$.

**3.3)** Determinare al variare di $\alpha \in I\!R$ il numero di soluzioni dell'equazione

$$e^{-x}(1+x) = \alpha.$$

*Possibile svolgimento.* Consideriamo la funzione $f : I\!R \to I\!R$

$$f(x) = (1+x)e^{-x}.$$

Evidentemente $x$ è una soluzione dell'equazione data se e solo se

$$f(x) = \alpha.$$

Quindi il problema proposto si riconduce alla determinazione delle intersezioni del grafico della funzione $y = f(x)$ con la retta orizzontale di equazione $y = \alpha$, al variare del parametro $\alpha$ in $I\!R$.

Notiamo che per ogni $x$ vale l'uguaglianza $f(x) = \dfrac{1+x}{e^x}$.

Evidentemente la funzione $f$ è continua e derivabile su $I\!R$. Studiamone il segno: essendo $e^x > 0$ per ogni $x$, si ha $f(x) > 0$ se e solo se $x+1 > 0$, da cui $x > -1$. Inoltre $f(x) < 0$ se e solo se $x < -1$, mentre l'equazione $f(x) = 0$ ha come unica soluzione $x = -1$. Abbiamo poi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ per la gerarchia degli infiniti e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (attenzione al segno!).

Per studiare la monotonia di $f$ calcoliamone la derivata prima. Si ha

$$f'(x) = \mathrm{D}\left((1+x)e^{-x}\right) = e^{-x} - (1+x)e^{-x} = -xe^{-x}.$$

Studiamone il segno: essendo $e^{-x} > 0$ per ogni $x$, si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $-x > 0$, e cioè $x < 0$, $f'(x) < 0$ se e solo se $-x < 0$, ovvero $x > 0$, e inoltre $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$. Perciò la funzione $f$ è crescente nell'intervallo $(-\infty, 0)$ ed è decrescente in $(0, +\infty)$. Per $x = 0$ la funzione data ammette il valore massimo (assoluto) dato da $f(0) = 1$.

Un semplice studio del grafico mostra che l'equazione $f(x) = \alpha$ ha una soluzione se $\alpha < 0$; per $\alpha = 0$ ha solo la soluzione $x = -1$; quando $0 < \alpha < 1$ ci sono due soluzioni (una positiva e una negativa); per $\alpha = 1$ c'è l'unica soluzione $x = 0$; non ci sono soluzioni se $\alpha > 1$.

**3.4) Per esercizio:** determinare al variare di $\alpha \in I\!R$ il numero di soluzioni dell'equazione

$$e^x(1+x) = \alpha$$

verificando che

- $\alpha < -e^{-2} \Rightarrow$ non ci sono soluzioni;
- $\alpha = -e^{-2} \Rightarrow$ c'è una sola soluzione ($x = -2$);
- $-e^{-2} < \alpha < 0 \Rightarrow$ ci sono 2 soluzioni;
- $\alpha = 0 \Rightarrow$ c'è una sola soluzione ($x = -1$);
- $\alpha > 0 \Rightarrow$ c'è una soluzione.