

Università degli Studi di Ancona
Corso di Laurea in SS.FF.NN.
Corso di MATEMATICA (A.A. 2002/2003)

Docente: Prof. Piero MONTECCHIARI

STUDIO DI FUNZIONI

Scritti dal tutore Dario GENOVESE

Dominio

La prima cosa da fare per studiare una funzione $y = f(x)$ è determinare il suo dominio D qualora questo non fosse esplicitamente specificato nel testo. A tale proposito bisogna individuare tutte le operazioni ‘pericolose’, ovvero quelle operazioni il cui argomento non può essere arbitrariamente scelto in tutto $\mathbb{R}$.

Si riportano alcuni esempi di queste operazioni, con a fianco la condizione che deve soddisfare il relativo argomento.

Operazione	Simbolo	Condizione
Logaritmo	$\log \star$	$\star > 0$
Rapporto	$\frac{\alpha}{\star}$	$\star \neq 0$
Radice pari	$\sqrt[n]{\star} \quad (n \in \mathbb{N})$	$\star \geq 0$
Tangente	$\tan \star$	$\star \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$
Arcoseno	$\arcsin \star$	$-1 \leq \star \leq 1$

Si deve quindi fare un elenco di tutti i punti di frontiera di D , per poi studiarli.

Continuità

Il passo successivo è studiare la continuità della funzione. Occorre determinare tutti i punti di discontinuità, determinarne il tipo e aggiungerli all’elenco di cui sopra. Spesso le discontinuità si hanno quando la funzione è definita con più leggi. Nei punti di ‘contatto’ tra una legge e l’altra c’è un probabile punto di discontinuità ed occorre sempre controllarne l’effettiva presenza.

Dominio della derivata

A questo punto si deve calcolare la derivata prima della funzione e con lo stesso procedimento di prima si deve determinare il dominio D' della derivata. Tale dominio D' deve essere incluso nel dominio D precedentemente ottenuto (o al più coincidente con D), nel senso che non ci devono essere punti appartenenti a D' ma non appartenenti a D . Se ad esempio considero $y = \ln x$ ottengo $y' = \frac{1}{x}$, da cui $D = (0, +\infty)$, mentre $D' = \mathbb{R} - \{0\}$, il che è errato. In realtà sarebbe più corretto scrivere $y' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$.

Una volta calcolato D' si determinano tutti i suoi punti di frontiera e si aggiungono all’elenco.

Studio dei punti notevoli

Ora si deve studiare quello che accade nei punti dell’elenco così ottenuto. Per ogni punto c si deve calcolare (se esiste) il limite destro e sinistro di $f(x)$ e di $f'(x)$ per x tendente a c , nonché il valore di $f(c)$ qualora c appartenga a D . Si devono inoltre

calcolare $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$, ovvero bisogna considerare come punti notevoli anche $\pm\infty$. Nei paragrafi successivi verrà data la classificazione di questi punti notevoli.

Intersezioni con gli assi

E' opportuno calcolare, se $0 \in D$, $f(0)$ per ottenere così l'intersezione con l'asse y . Risolvendo inoltre l'equazione $f(x) = 0$ si possono calcolare le eventuali intersezioni con l'asse x .

Asintoti orizzontali

Si dice che $f(x)$ ha un asintoto orizzontale a $+\infty$ se esiste finito $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. La definizione è analoga per $-\infty$. La retta di equazione $y = \ell = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ dicesi asintoto della funzione. Si possono distinguere tre sottocasi di asintoto orizzontale:

- 1) La funzione è sempre maggiore di ℓ in un intorno di ∞ .
- 2) La funzione è sempre minore di ℓ in un intorno di ∞ .
- 3) In ogni intorno di ∞ la funzione interseca l'asintoto.

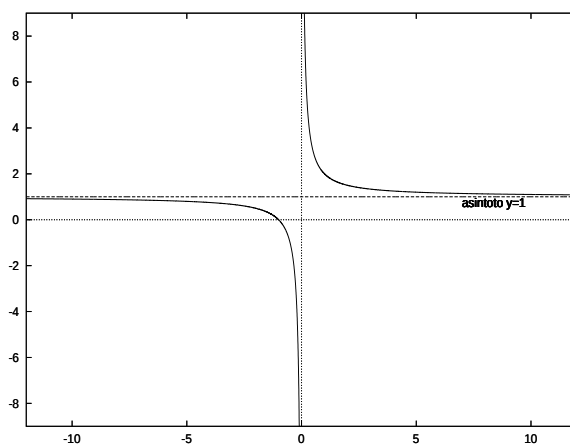
Esempi:

- 1) La funzione

$$y = 1 + \frac{1}{x}$$

ha la retta $y = 1$ sia come asintoto destro che come asintoto sinistro. Quello sinistro (a $-\infty$) è di tipo 2, in quanto per ogni $x < 0$ si ha $\frac{1}{x} < 0$ e quindi $1 + \frac{1}{x} < 1$, mentre per $x > 0$ si ha $1 + \frac{1}{x} > 1$ e quindi l'asintoto destro è di tipo 1

Il grafico della funzione è il seguente:

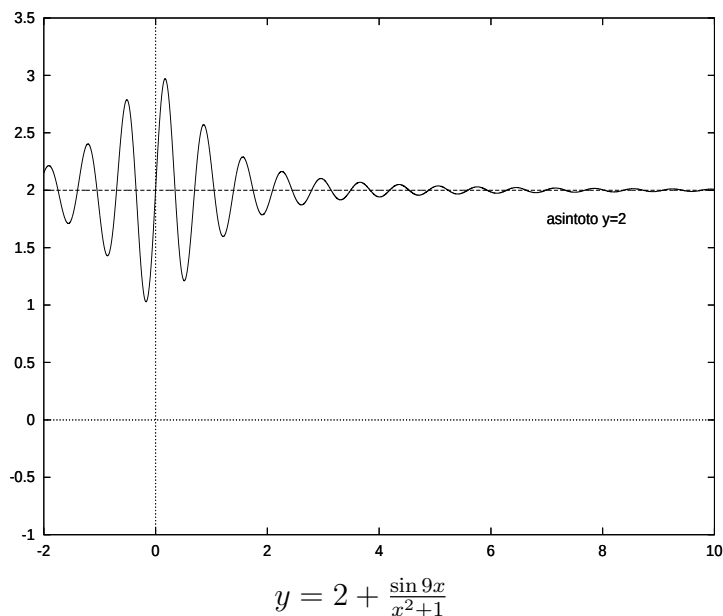


$$y = 1 + \frac{1}{x}$$

2) La funzione

$$y = 2 + \frac{\sin 9x}{x^2 + 1}$$

ha la retta $y = 2$ come asintoto destro e sinistro. L'asintoto è del tipo descritto nel punto 3, in quanto ponendo $y = 2$ si ottiene $x = \frac{k\pi}{9}$, con $k \in \mathbb{N}$, e quindi esistono valori positivi e negativi arbitrariamente grandi in valore assoluto in cui la y interseca l'asintoto. Il grafico della funzione è il seguente:



Asintoti obliqui

Si dice che la funzione $y = f(x)$ ha la retta $y = mx + q$ come asintoto obliquo (destro o sinistro a seconda dei casi) se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx - q = 0$. Valgono le stesse considerazioni e classificazioni fatte per gli asintoti orizzontali (in effetti l'asintoto orizzontale è un caso particolare di asintoto obliquo, in cui $m = 0$). Per determinare un asintoto obliquo bisogna calcolarsi i valori di m e q . Si determina prima la m con una delle seguenti formule:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$$

Alcune considerazioni sull'uso di queste formule:

- 1) Se il limite nella prima non esiste allora siamo sicuri che non esiste asintoto obliquo.
- 2) La seconda formula si ottiene dalla prima tramite l'uso del teorema di De L'Hopital, e affinché essa sia valida deve esistere $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$; nel caso il limite nella seconda

formula non esista non possiamo dire che non ci siano asintoti, in quanto si potrebbe riuscire a ricavare m dalla prima.

3) Si può dimostrare che se riusciamo a calcolare m dalla seconda formula, si può ottenere la stessa m dalla prima.

4) Se mediante l'applicazione di una delle due formule otteniamo un limite infinito, l'asintoto non esiste.

Conviene quindi usare la seconda formula se è facile calcolare la derivata di f ed esiste $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$; bisogna usare la prima negli altri casi.

Una volta trovata m si deve calcolare $q = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx$. Se tale limite esiste l'asintoto esiste, altrimenti non si hanno asintoti obliqui.

Esempi:

1) Determinare se la funzione

$$y = x + \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}$$

presenta asintoti obliqui e calcolarli.

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^2} \right) = 1$$

Si ha quindi $m = 1$, sia a $+\infty$ che a $-\infty$. Inoltre

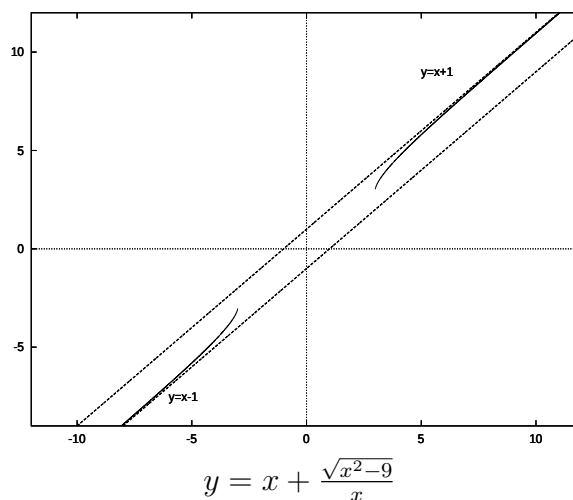
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} - 1 \cdot x = -1$$

mentre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} - 1 \cdot x = 1$$

Quindi abbiamo come asintoto sinistro la retta $y = x - 1$ e come asintoto destro la retta $y = x + 1$. Inoltre, poiché per $x > 3$ si ha $0 < \sqrt{x^2 - 9} < x$, si ha anche $\frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} < 1$, quindi l'asintoto destro è di tipo 2. Analogamente si verifica che l'asintoto sinistro è del tipo 1.

Il grafico della funzione è il seguente:



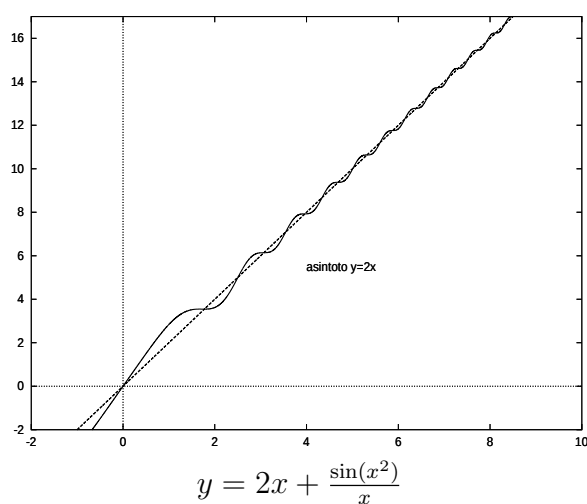
2) Determinare se la funzione

$$y = 2x + \frac{\sin(x^2)}{x}$$

presenta un asintoto destro.

Si ricava facilmente $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 + 0 = 2$, mentre $q = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x^2)}{x}$, da cui si ottiene l'asintoto $y = 2x$. Si osservi che se avessimo tentato di usare la seconda formula per calcolare la m avremmo ottenuto $y' = 2 + 2 \cos x - \frac{\sin(x^2)}{x^2}$, che per x tendente a $+\infty$ risulta indeterminata (non c'è limite).

Si può dimostrare che l'asintoto è del tipo 3, in quanto $\sin x^2$ all'aumentare di x passa ripetutamente da valori positivi a valori negativi, anche se in modo non periodico. Il grafico della funzione è il seguente:

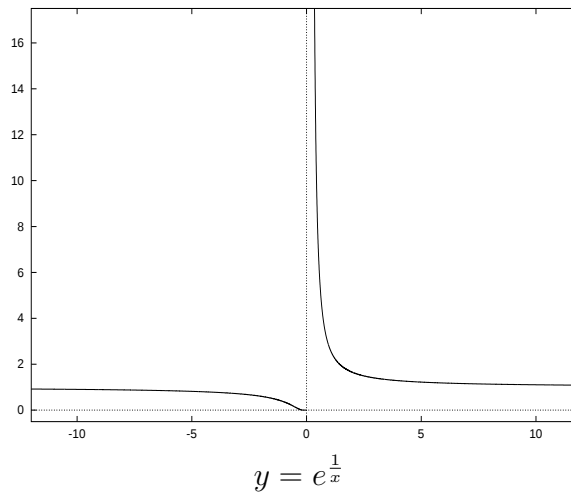


Asintoti verticali

La funzione $y = f(x)$ ha un asintoto verticale nel punto $x = c$ se almeno uno dei due limiti

$$\lim_{x \rightarrow c^{\pm}} f(x)$$

risulta infinito. Ovviamente c deve assumere un valore finito. Spesso i punti di frontiera del dominio di f sono punti in cui è presente un asintoto verticale, soprattutto se si ottengono in corrispondenza dell'annullarsi di un denominatore in una frazione. Ad esempio la funzione $y = e^{\frac{1}{x}}$ presenta un asintoto verticale in $x = 0$. Infatti $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = +\infty$, e anche se $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$ si ha comunque un asintoto in quanto ne basta uno per soddisfare la definizione. Il grafico della funzione è il seguente:

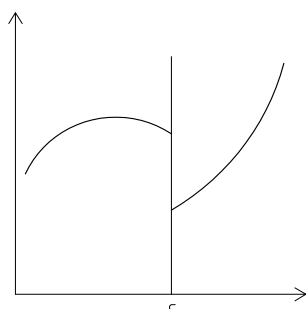


Punti angolosi

La funzione $y = f(x)$ presenta un punto angoloso nel punto $x = c$ ($x \neq \infty$) se sono soddisfatte entrambe le seguenti ipotesi:

- 1) La funzione è continua in c
- 2) Esistono i limiti destro e sinistro per x che tende a c di $f'(x)$ e questi due limiti sono distinti.

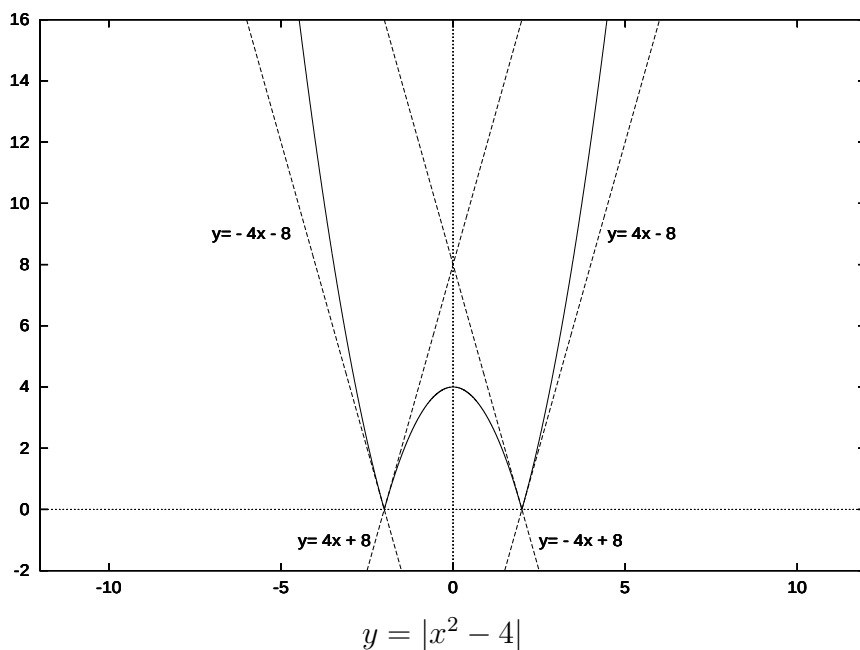
Il grafico qualitativo di una funzione che rispetta la seconda ipotesi ma non la prima (e che quindi non ha un punto angoloso) è il seguente:



In presenza di un punto angoloso è' preferibile calcolare le due tangenti alla curva nel punto c . La funzione

$$y = |x^2 - 4|$$

presenta due punti angolosi, uno in $x = -2$ e uno in $x = 2$. Consideriamo infatti il punto $x = 2$. Si ha che la funzione è continua in quanto composizione di funzioni continue. Inoltre $\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} -2x = -4$, mentre $\lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2x = 4$. Poichè $f(2) = 0$, le due rette tangenti (sinistra e destra) nel punto $x = 2$ sono $y = -4x + 8$ e $y = 4x - 8$. Nel punto angoloso $x = -2$ si ottengono per simmetria le due rette $y = -4x - 8$ e $y = 4x + 8$. Il grafico della funzione è il seguente:



Punti cuspidali

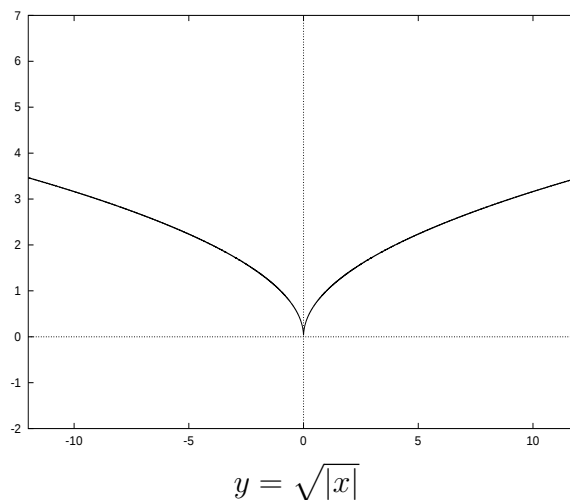
La funzione $y = f(x)$ presenta una cuspidale nel punto $x = c$ ($x \neq \infty$) se sono soddisfatte

entrambe le seguenti ipotesi:

1) La funzione è continua in c

2) I limiti destro e sinistro per x che tende a c di $f'(x)$ sono infiniti e di segno discorde. In teoria si potrebbe considerare la cuspide come un particolare punto angoloso. Valgono quindi le stesse osservazioni.

La funzione $y = \sqrt{|x|}$ presenta un punto cuspidale in $x = 0$. Infatti $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$. La tangente limite ai due rami di curva è la retta $x = 0$. Il grafico della funzione è il seguente:



Crescenza e decrescenza, massimi e minimi

La funzione $y = f(x)$ è crescente nel punto $x = c$ se esistono un intorno sinistro I^- e un intorno destro I^+ di c tali che $f(x) \leq f(c)$ se $x \in I^-$ e $f(x) \geq f(c)$ se $x \in I^+$. La funzione si dice crescente in un intervallo se è crescente in ogni punto di tale intervallo. La definizione di funzione strettamente crescente si ottiene dalle precedenti eliminando i segni di uguaglianza, come anche la definizione di funzione decrescente si ottiene cambiando i segni delle disuguaglianze.

Si dice inoltre che la funzione presenta un massimo relativo in $x = c$ se esiste un intorno completo di c tale che $f(c) \geq f(x)$ per ogni x in tale intorno. Se tale definizione vale per ogni x nel dominio D della funzione, il massimo si dice anche assoluto. La definizione di minimo è equivalente.

Si può dimostrare che se una funzione è derivabile in (a, b) e presenta un punto di massimo c in tale intervallo, allora $f'(c) = 0$. Non è vero il contrario, ad esempio la funzione $y = x^3$ ha come derivata $y' = 3x^2$, che si annulla in $x = 0$. Tuttavia y non presenta un massimo o un minimo in $x = 0$, anzi in questo punto risulta crescente.

Si può dimostrare che se la derivata di una funzione è positiva in un intervallo la funzione è crescente, quindi se la derivata di una funzione è positiva in un intorno sinistro e

negativa in un intorno destro di c si ha un massimo, anche se non esiste $f'(c)$. Tuttavia tale condizione non è necessaria. Si consideri ad esempio la funzione

$$y = f(x) = \begin{cases} -x^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sin \frac{1}{x^2} \right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

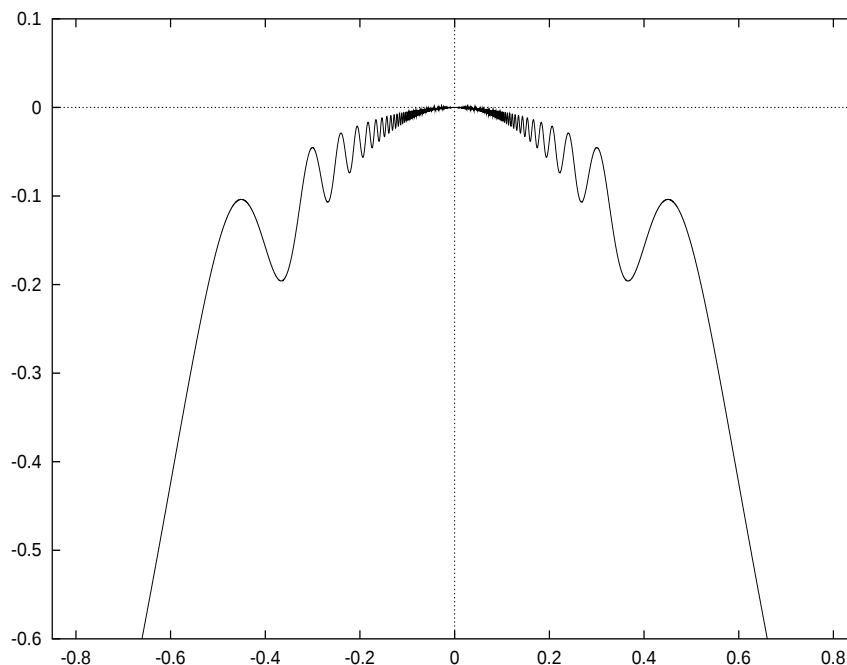
Si vuole stabilire se presenta un massimo relativo in $x = 0$. La sua derivata è, per $x \neq 0$,

$$y' = -2x \left(1 + \frac{1}{2} \sin \frac{1}{x^2} \right) + \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x^2}$$

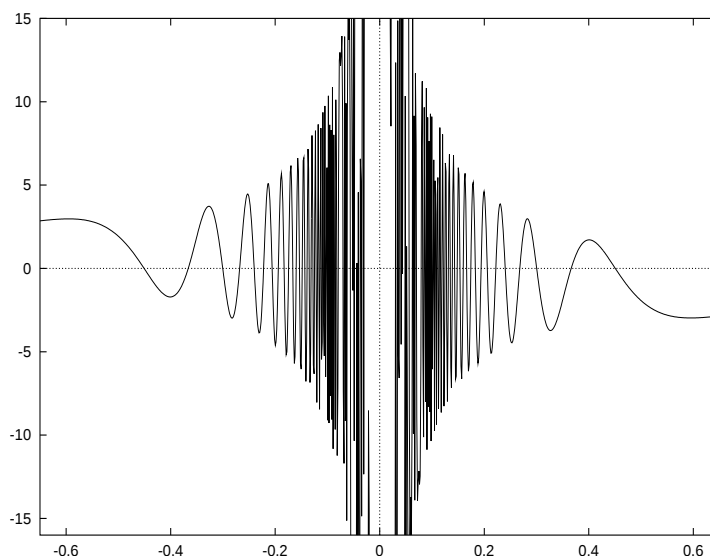
Tale funzione oscilla ripetutamente tra valori positivi e negativi vicino $x = 0$, in quanto il termine $\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x^2}$ è indeterminato (anzi l'ampiezza dell'oscillazione cresce indefinitamente fino a diventare arbitrariamente grande!). Non esiste quindi nessun intorno di 0 (destro o sinistro) in cui la funzione è monotona. Per $x = 0$ si ha tuttavia

$$y'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2(1 + \frac{1}{2} \sin \frac{1}{h})}{h} = 0$$

Questo calcolo di per sè non ci dice niente. Se avessimo ottenuto un valore diverso da 0 saremmo stati sicuri che non c'era un massimo in 0, ma poichè la condizione è necessaria ma non sufficiente dobbiamo inventarci qualcos'altro, perchè ci potrebbe essere un minimo, un flesso, o niente di particolare. Il trucco sta nell'osservare che la funzione è sempre negativa per $x \neq 0$, quindi $x = 0$ è effettivamente un massimo assoluto e quindi anche relativo. Il grafico della funzione è il seguente:



Il grafico (in scala opportuna) della funzione derivata è invece:



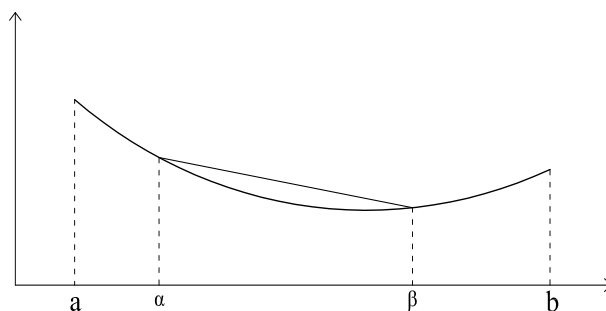
Concavità e flessi

Una funzione rivolge la concavità verso il basso (ovvero è concava) nell'intervallo (a, b) , se per ogni coppia di numeri λ e μ tale che $0 \leq \lambda \leq 1$, $0 \leq \mu \leq 1$ e $\lambda + \mu = 1$, si abbia

$$f(\lambda a + \mu b) \geq \lambda f(a) + \mu f(b)$$

Per una funzione convessa (che volge la concavità verso l'alto) si ha invece

$$f(\lambda a + \mu b) \leq \lambda f(a) + \mu f(b)$$



L'interpretazione di quest'ultima diseuguaglianza è che per ogni intervallo $(\alpha; \beta) \subset (a, b)$ si ha che la funzione in tale intervallo sta al di sotto della retta passante per $(\alpha; f(\alpha))$ e $(\beta; f(\beta))$.

Si può dimostrare che se $f''(x) \geq 0$ in (a, b) la funzione è convessa. Se $f''(x) \leq 0$ in

(a, b) la funzione è concava.

Se la funzione $f(x)$ è derivabile in c ed esiste un intorno sinistro di c in cui la funzione è concava e un intorno destro in cui è convessa si ha un flesso discendente. Se è vero il contrario si ha un flesso ascendente. La definizione si estende anche anche nel caso in cui i limite destro e sinistro in c di tale derivata siano infiniti (purchè di segno discorde e purchè la funzione sia comunque continua); nel caso il limite sinistro di f' sia $-\infty$ e il limite destro $+\infty$ si ha un flesso verticale discendente, in caso contrario un flesso verticale ascendente.

Si può dimostrare che se una funzione è derivabile due volte in un punto di flesso allora il valore della derivata seconda in tale punto è 0. Non è vero il contrario, come si può facilmente riconoscere studiando $y = x^4$ in $x = 0$.

L'uso della condizione $f'' = 0$ per la ricerca di flessi è analoga all'uso di $f' = 0$ per la ricerca di massimi e minimi, e vanno quindi usate le stesse cautele.

Teoremi utili

1) Teorema di Weierstrass

Una funzione continua in un compatto assume almeno un massimo ed un minimo assoluti.

2) Teorema dei valori intermedi

Se $f(x)$ è continua in $[a, b]$ e $f(a) \leq z \leq f(b)$, allora esiste almeno un $x \in [a, b]$ tale che $f(x) = z$. Caso particolare di questo teorema è il teorema di esistenza degli zeri: se $f(a)$ ed $f(b)$ sono discordi allora esiste un x tale che $f(x) = 0$.

3) In una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ in un dominio connesso tra un massimo ed un minimo c'è sempre un flesso (conseguenza del teorema 1).

4) Teorema delle derivate successive per massimi, minimi e flessi

Sia $f(x)$ una funzione derivabile quante volte occorre in (a, b) e sia c un punto in tale intervallo. Sia inoltre $f^{(k)}(c) = 0$ per ogni $2 \leq k < n$ e sia $f^{(n)}(c) \neq 0$.

Si distinguono i seguenti casi:

$(f'(c) = 0, \quad n \text{ pari}, \quad f^{(n)}(c) < 0) \rightarrow c$ è un [punto di] massimo

$(f'(c) = 0, \quad n \text{ pari}, \quad f^{(n)}(c) > 0) \rightarrow c$ è un minimo

$(f'(c) = 0, \quad n \text{ dispari}, \quad f^{(n)}(c) < 0) \rightarrow c$ è un flesso orizzontale discendente

$(f'(c) = 0, \quad n \text{ dispari}, \quad f^{(n)}(c) > 0) \rightarrow c$ è un flesso orizzontale ascendente

$(f'(c) \neq 0, \quad n \text{ dispari}) \rightarrow c$ è un flesso a tangente obliqua

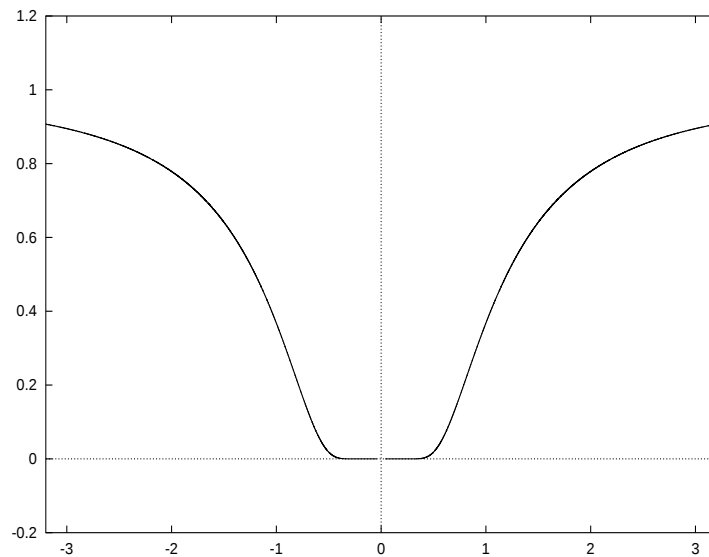
Si osservi che tale condizioni sono sufficienti ma non necessarie. Esistono funzioni in cui

tale teorema risulta inutile. Si consideri ad esempio la funzione

$$y = f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

In $x = 0$ si ha un punto di minimo in quanto altrove la funzione è sempre positiva. Tuttavia se si calcolano (usando direttamente la definizione) le derivate di qualsivoglia ordine in $x = 0$, queste sono tutte nulle.

Il grafico della funzione è il seguente:



Esempi di studi di funzioni

1) Si studi la funzione

$$y = \arcsin(e^{-|x|})$$

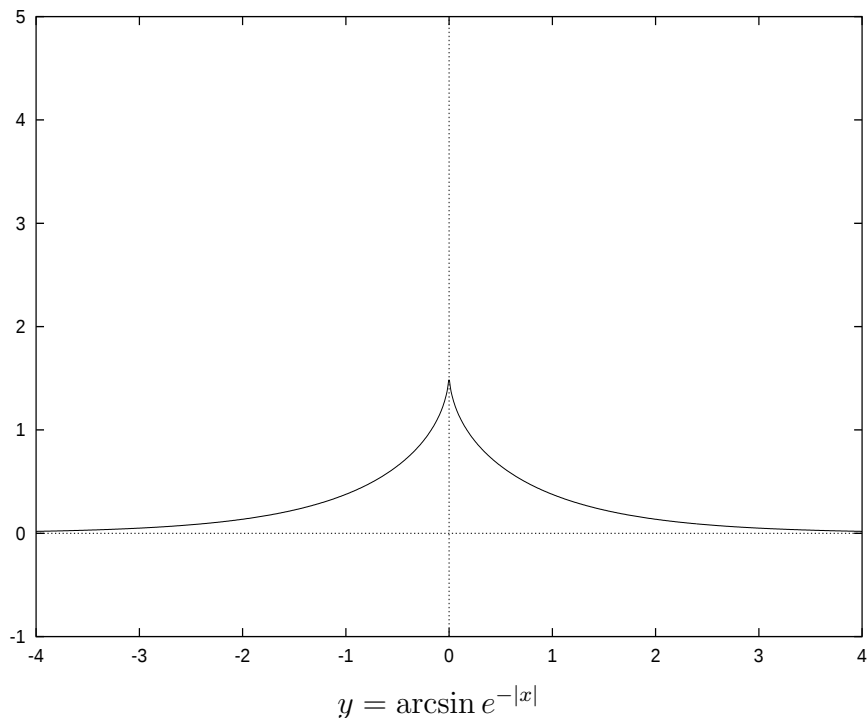
Il dominio è tutto $\mathbb{R}$, e la funzione è inoltre continua in quanto composizione di funzioni continue.. Tale funzione è pari, basta quindi studiarla per $x \geq 0$, trascurando così il modulo. Per $x = 0$ si ha $y = \frac{\pi}{2} \approx 1.6$. Se si pone $y = 0$ si ottiene $e^{-x} = 0$, il che è impossibile. Non ci sono quindi intersezioni con l'asse x .

Si ha, per $x > 0$,

$$y' = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{1 - e^{-2x}}}$$

Inoltre $\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = -\infty$ e, per simmetria, $\lim_{x \rightarrow 0^-} y' = +\infty$. La funzione non è quindi

derivabile in $x = 0$ dove presenta invece una cuspidè. La derivata è sempre negativa per $x > 0$ ed è quindi decrescente. Per simmetria la funzione è crescente per $x < 0$. Infine si ha $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ e la funzione presenta quindi l'asintoto orizzontale $y = 0$ sia a destra che a sinistra. Il grafico della funzione è il seguente:



2) Si studi la funzione

$$y = \sqrt[5]{x(x^2 - 1)^2}$$

Non ci sono limitazioni al dominio. Inoltre la funzione presenta una simmetria dispari e si può quindi studiare in $x \geq 0$. Per $x = 0$ si ha $y = 0$, mentre se si pone $y = 0$ si ottiene, oltre ovviamente a $x = 0$, anche $x = \pm 1$. La derivata, dopo aver svolto i calcoli, assume la forma

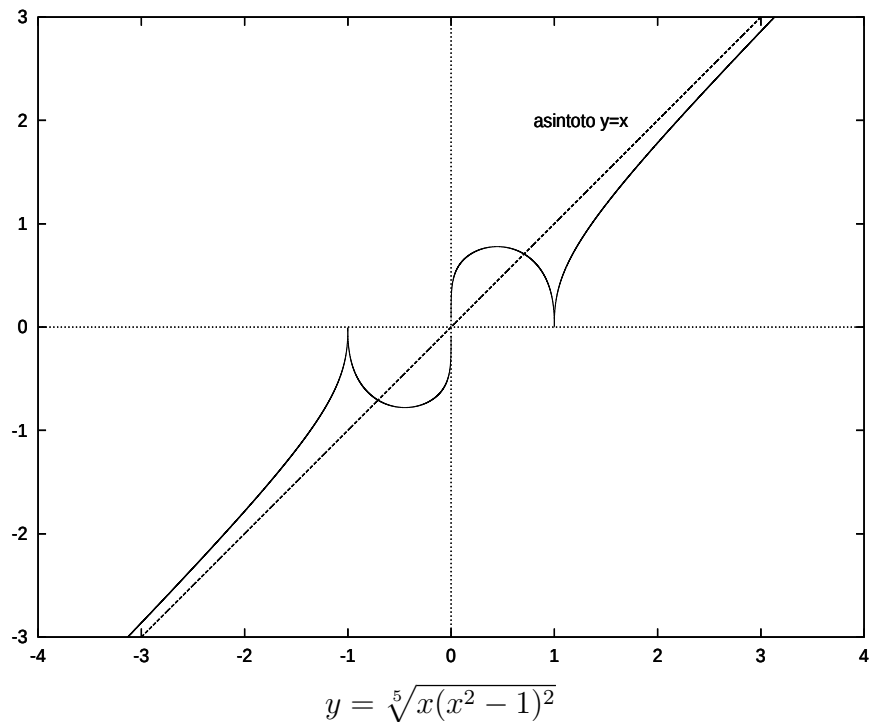
$$y' = \frac{x^2 - \frac{1}{5}}{\sqrt[5]{x^4(x^2 - 1)^3}}$$

da cui $y' > 0$ per $0 < x < \sqrt{5}$ e per $x > 1$; $y' = 0$ per $x = \sqrt{5}$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} y' = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} y' = +\infty$. Lo studio della derivata per $x < 0$ presenta le stesse caratteristiche in quanto la derivata di una funzione dispari è una funzione pari. Quindi la funzione presenta un flesso verticale ascendente in $x = 0$, due cuspidi in $x = \pm 1$ un massimo in $\sqrt{5}$ e un minimo in $-\sqrt{5}$. Si ha inoltre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{x(x^2 - 1)^2}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x(x^2-1)^2} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt[5]{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}} - 1\right)}{\frac{1}{x}}$$

Tale limite si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$ e si può calcolare tramite la regola di De l'Hopital. Eseguendo i calcoli si ottiene il valore 0. La funzione presenta quindi la retta $y = x$ come asintoto destro e sinistro. Il grafico della funzione è il seguente:



3) Si studi la funzione

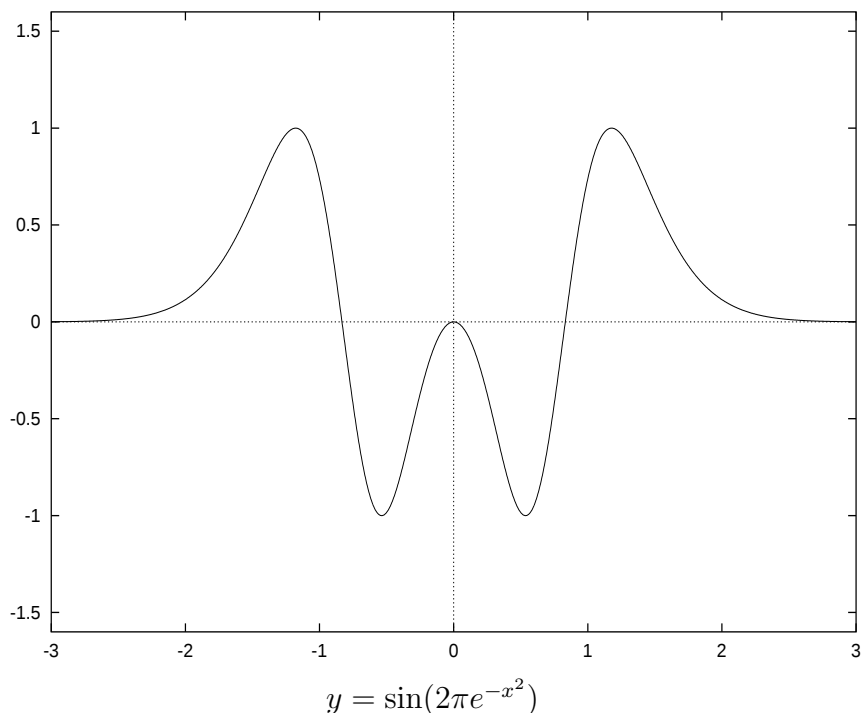
$$y = \sin(2\pi e^{-x^2})$$

La funzione è pari e non presenta limitazioni al dominio, ed è anche continua. Studiando preliminarmente l'argomento del seno, si evince che $2\pi e^{-x^2}$, funzione simmetrica, assume tutti i valori dell'intervallo $(0, 1]$ ed è monotona in ciascuno dei 2 intervalli $x > 0$ e $x < 0$. Ritornando ora allo studio della funzione originale, per $x = 0$ si ha $y = 0$, mentre ponendo $y = 0$ si ottengono anche le due soluzioni simmetriche $x = \pm\sqrt{\ln 2} \approx \pm 0.83$. $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$, la funzione presenta quindi l'asintoto $y = 0$ sia a destra che a sinistra. Si ha

$$y' = -4x\pi \cos(2\pi e^{-x^2}) \cdot e^{-x^2}$$

Per la determinazione degli intervalli di crescita e decrescenza si può supporre $x \geq 0$ e sfruttare la simmetria dispari della derivata. Si ha che la funzione è decrescente ($y' > 0$) per $0 < e^{-x^2} < \frac{1}{4}$, crescente per $\frac{1}{4} < e^{-x^2} < \frac{3}{4}$ e nuovamente decrescente per $\frac{3}{4} < e^{-x^2} < 1$.

1. Queste tre condizioni corrispondono rispettivamente a decrescenza per $x > \sqrt{\ln 4}$, crescita per $\sqrt{\ln \frac{4}{3}} < x < \sqrt{\ln 4}$ e decrescenza per $0 < x < \sqrt{\ln \frac{4}{3}}$. Di conseguenza si hanno massimi in $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{\ln 4} \approx \pm 1.18$ e minimi in $x = \pm\sqrt{\ln \frac{4}{3}} \approx \pm 0.54$. La localizzazione esatta dei flessi presenta notevoli onerosità di calcolo, comunque c'è un flesso in ciascuno dei 6 intervalli in cui è diviso l'insieme $\mathbb{R}$ dai 5 punti di massimo e minimo appena trovati. Il grafico della funzione è il seguente:



4) Si studi la funzione

$$y = x - 4 \arctan |x - 3|$$

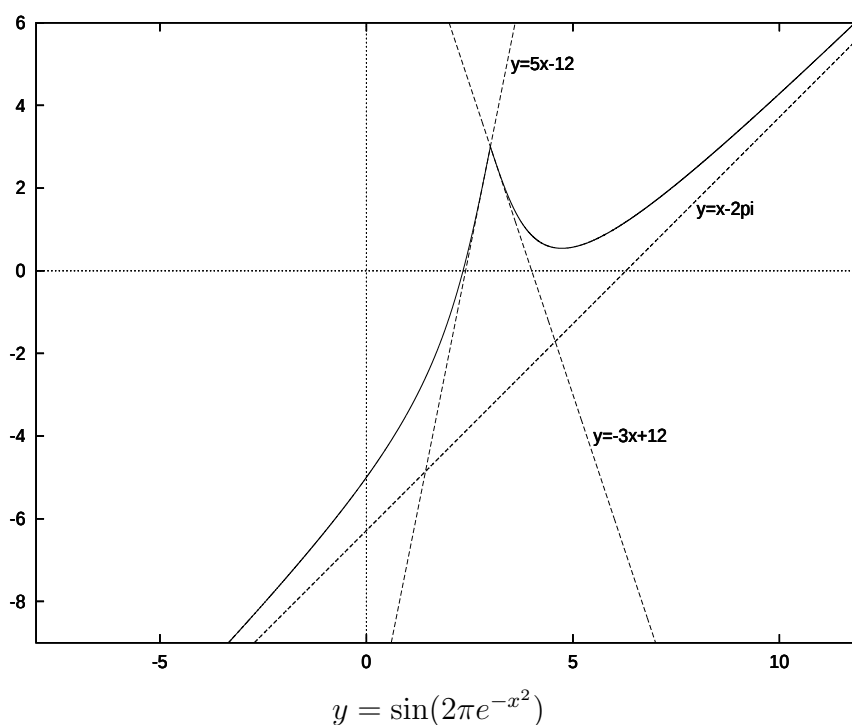
La funzione è continua in tutto $\mathbb{R}$. E' inoltre derivabile ad eccezione eventualmente del punto $x = 3$ in cui si annulla l'argomento del modulo.

Per $x = 0$ si ottiene $y = -4 \arctan 3 \approx -5$, mentre la ricerca di intersezioni con l'asse x non è effettuabile con metodi elementari. Poichè $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, la funzione ha l'asintoto $y = x - 2\pi$ sia come asintoto destro che sinistro. Nel punto notevole $x = 3$ si ha $y = 3$. Calcoliamo la derivata:

$$y' = \begin{cases} 1 - \frac{4}{1 + (x - 3)^2} & \text{se } x > 3 \\ 1 + \frac{4}{1 + (x - 3)^2} & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

Calcolando $\lim_{x \rightarrow 3^+} y' = -3$ e $\lim_{x \rightarrow 3^-} y' = 5$ si ha che, dato che i limiti destro e sinistro esistono ma sono distinti, la funzione non è derivabile in $x = 3$. La funzione ha in $x = 3$ un punto angoloso e le due tangenti limite sono $y = 5x - 12$ e $y = -3x + 12$. Studiando il segno della derivata si dimostra che la funzione è crescente per $x < 3$, decrescente per $3 < x < 3 + \sqrt{3}$ e crescente per $x > 3 + \sqrt{3}$. In $x = 3 + \sqrt{3} \approx 4.73$ si ha un minimo relativo.

Poichè $y(0) < 0$ e $y(3) = 3 > 0$ e in $(0, 3)$ la funzione è crescente, in tale intervallo la funzione è monotona esiste una ed una sola intersezione con l'asse x in $(0, 3)$. Inoltre calcolando il valore della funzione nel punto di minimo relativo $x = 3 + \sqrt{3}$, si ottiene $y \approx 0.54 > 0$ e quindi non esistono altre intersezioni. Il grafico della funzione è il seguente:



5) Studiare la funzione

$$y = x + \sin x$$

La funzione è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$. $y' = 1 + \cos x \geq 0$. La funzione è quindi monotona ed esiste una sola intersezione con l'asse x , che si ha in corrispondenza di $x = 0$. La funzione non presenta asintoti: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1$, ma non esiste $\lim_{x \rightarrow \infty} x + \sin x - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$.

La derivata prima è periodica di periodo 2π , il che significa che la funzione, pur non essendo periodica, presenta una certa regolarità: si verifica facilmente che $y(x + 2\pi) =$

$y(x) + 2\pi$. Calcolando $y' = 0$ si ottiene $y = (2k+1)\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ponendo $y'' = -\sin x = 0$ Si ottiene $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Con $y''' = -\cos x = 0$ si ottiene $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$. Applicando il metodo delle derivate successive si ottengono dei flessi orizzontali ascendenti in $x = 2k\pi$, dei flessi obliqui in $x = (2k+1)\pi$. Il grafico è il seguente:

