Corsi di Laurea in Scienze Biologiche
Prova scritta di Informatica e Statistica Generale 06/05/2008
Soluzione

1.) Sia $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset I\!R$ una popolazione statistica relativa ad una variabile numerica X di modalità $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$. Indicate con $p_1, p_2, \ldots, p_k$ le frequenze relative di $X_1, X_2, \ldots, X_k$

Osservazioni preliminari: I tre quesiti che seguono riguardano alcune proprietà delle frequenze relative e degli indici di posizione. Come faremo anche di seguito, prima di rispondere ricordiamo delle nozioni presentate nel corso corredandole di alcune osservazioni.

Si ricorda che la frequenza relativa p_j di X_j è uguale al rapporto tra la frequenza assoluta f_j di X_j e il numero totale di dati n:

$$p_j = \frac{f_j}{n} = \frac{\#\{i \in \{1, \ldots, n\} \,/\, x_i = X_j\}}{n}.$$

Essendo necessariamente che la somma delle frequenze assolute f_j è uguale al numero n otteniamo la nota proprietà:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{k} p_j = \sum_{j=1}^{k} \frac{f_j}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} f_j = \frac{1}{n} n = 1.}$$

Ciò permette di rispondere alle domande (A b)(C c)(D b)(B c).

Una seconda serie di domande [(A a)(B a)(C a)(D a)] riguardava il caso in cui una tra le frequenze relative fosse stata uguale a 1. Osserviamo brevemente che se per un certo indice j si ha $p_j = 1$, allora tutti i valori della popolazione sono costantemente uguali a X_j. In questo caso ovviamente tale valore X_j coincide con il valore medio e la varianza è nulla.

Volendo essere più dettagliati osserviamo infatti che se $p_j = 1$, necessariamente si ha che $f_j = n$, cioè che tutti gli n valori x_i sono costantemente uguali a X_j:

$$\boxed{\text{se } p_j = 1 \text{ allora } x_i = X_j \text{ per ogni } i \in \{1, \ldots, n\}.}$$

In questo caso particolare il valore medio di X coincide con il valore X_j:

$$\boxed{< X >= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_j = X_j}$$

e la varianza è nulla:

$$\boxed{\sigma_X^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - < X >)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - X_j)^2 = 0.}$$

Un'ultima serie di domande riguardava l'appartenenza di alcuni indici di posizione all'insieme delle modalità. Per quanto riguarda i valori modali ricordiamo che essi sono definiti come i valori più frequenti tra i valori della popolazione. In particolare sono valori assunti da X e quindi particolari modalità di X. Anche per i quartili vale la stessa considerazione. Infatti ricordiamo che tra i valori della popolazione, considerati in ordine crescente, diciamo j-esimo quartile il più piccolo tra i valori che risultino maggiori o uguali di ($\sim$) $j\frac{n}{4}$ elementi della popolazione. Ciò che ci interessa nel nostro caso è che comunque anche i quartili sono elementi della popolazione di dati e quindi particolari modalità di X. Per quanto riguarda infine la media aritmetica essa non è necessariamente uno dei valori tra le modalità di X. Come esempio si pensi a X come al valore delle monete metalliche in area Euro. Allora l'insieme delle modalità è $\{0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2\}$ (Euro). Nel salvadanaio ho trovato 5 monete da 0.01, 5 monete da 0.02, 7 monete da 0.05, 2 monete da 0.2, 2 monete da 1 per un totale di 2.9 Euro. Il valore medio per moneta è 2.9/21, diverso da ciascuna modalità di X. Si osservi come i valori modali e i quartili sono invece valori di particolari monete.

Domande e Risposte:

(Aa) Se $p_1 = 1$ allora $x_i = X_1$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$. $\boxed{\text{V}}$

(Ba) Se $p_2 = 1$ allora $x_i = X_2$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$. $\boxed{\text{V}}$

(Ca) Se $p_3 = 1$ allora la varianza di X è nulla. $\boxed{\text{V}}$

(Da) Se $p_4 = 1$ allora il valor medio di X è X_4. $\boxed{\text{V}}$

(Ab)(Cc)(D b) $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. $\boxed{\text{V}}$

(Bc) $\sum_{i=1}^{k} p_i = n$. $\boxed{\text{F}}$

(Ac)(Bb) I vari quartili coincidono con alcune tra le modalità $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ di X. $\boxed{\text{V}}$

(Cb) I valori modali coincidono con alcune tra le modalità $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ di X. $\boxed{\text{V}}$

(Dc) Il valore medio coincide con una tra le modalità $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ di X. $\boxed{\text{F}}$

2.) Siano $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \subset I\!R$ popolazioni statistiche relative alle variabili X, Y. Se la covarianza $\sigma_{X,Y} = \begin{cases} 2 & \text{compito } A \\ 4 & \text{compito } B \\ 3 & \text{compito } C \\ 5 & \text{compito } D \end{cases}$ e se la varianza di X, $\sigma_X^2 = 1$, allora

Osservazioni preliminari: I tre quesiti che seguono riguardano alcune proprietà della varianza e della covarianza di una coppia di variabili numeriche X, Y.

Si ricorda che la varianza di X, e analogamente per Y, è definita come $\sigma_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2$. La covarianza tra X e Y è definita come $\sigma_{X,Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})$.

Conoscendo tali valori e i valori medi di X e Y, tramite il metodo dei minimi quadrati, è possibile ricavare il coefficiente angolare e il termine noto della retta di regressione valendo che la retta di regressione ha in generale l'equazione

$$\boxed{y = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X^2}(x - \bar{X}) + \bar{Y}}$$

Supposto, come nei nostri esercizi, che $\bar{X} = \bar{Y} = 0$ e che $\sigma_X = 1$, l'equazione assume allora la forma $\boxed{y = \sigma_{X,Y} x}$ e la retta passa per il punto $(1, \sigma_{X,Y})$. Ciò permette di rispondere alle domande (Aa) (Ba) (Ca) (Da).

Un'altra proprietà che lega la covarianza di X e Y alle singole varianze di X e Y discende dalla nota diseguaglianza di Cauchy: $\boxed{\sigma_{X,Y} \leq \sigma_X \sigma_Y}$. Visto che si suppone $\sigma_X = 1$ deduciamo che $\boxed{\sigma_{X,Y} \leq \sigma_Y}$. Ciò permette di rispondere alle domande (Ab) (Bc) (Cc) (Dc).

Nota la varianza e il valor medio della variabile X è possibile definire la variabile standardizzata $\boxed{Z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma_X}}$. Se $\sigma_X = 1$ allora $Z = X - \bar{X}$ e se $\bar{X} = 0$ allora $Z = X$. Ciò permette di rispondere alle domande (Ac)(Bb)(Cb)(Db).

Domande e Risposte:

(Aa) Supposto che i valori medi di X e Y siano nulli la retta di regressione passa per il punto $(X, Y) = (1, 2)$ $\boxed{\text{V}}$

(Da)(Ca)(Ba) Supposto che i valori medi di X e Y siano nulli la retta di regressione passa per il punto $(X, Y) = (1, 2)$ $\boxed{\text{F}}$

(Bc)(Ab) Denotata con σ_Y la deviazione standard di Y si ha $\boxed{\sigma_Y \geq \sigma_{X,Y}}$

(Dc)(Cc) Denotata con σ_Y la deviazione standard di Y si ha $\boxed{\sigma_Y \geq \sqrt{3}}$

(Bb)(Ac) La variabile standardizzata di X assume gli stessi valori (assoluti) di X. (si assume $\bar{X} = 0$ come detto in Aula) $\boxed{\text{V}}$

(Cb) La variabile standardizzata di X assume valori più piccoli di 1. $\boxed{\text{F}}$

(Db) La variabile standardizzata di X assume valori più grandi di quelli di X. $\boxed{\text{F}}$

3.) Il formato MPEG (*per la verifica delle risposte si consultino direttamente gli appunti*)

(Da)(Aa) La sigla denota un gruppo di lavoro denominato *Moving Picture Entertainment Group* $\boxed{\text{F}}$

(Ca)(Ba) La sigla denota un gruppo di lavoro denominato *Moving Picture Expert Group* V

(Db)(Cc)(Bc)(Ab) E' utilizzato per la codifica dell'audio e del video digitale V

(Bb)(Ac) Usa una tecnica di compressione con perdita di informazione V

(Dc)(Cb) Usa una tecnica di compressione senza perdita di informazione F

4.) In complemento a 1 su due byte il numero 1001010111110110

Osservazioni preliminari: Essendo la stringa 10010101 11110110 la codifica in complemento a 1 di un intero su due byte, essendo il bit più significativo uguale a 1, il numero rappresentato è negativo. La codifica del modulo si ottiene complementando tutti i singoli bit e dunque il numero rappresentato ha modulo 01101010 00001001. È semplice ottenere la rappresentazione del modulo in base 16 e in base 8 considerando rispettivamente le conversioni dei successivi quartetti e terzetti di bit:

Esadecimale	0110	1010	0000	1001
	6	A	0	9

e

Ottale	0	110	101	000	001	001
	0	6	5	0	1	1

Dunque il numero rappresentato è $-(6A09)_{(16)} = -(65011)_{(8)}$. Per determinarne la rappresentazione decimale basta osservare che $-(6A09)_{(16)} = -(9 + 10 \cdot 16^2 + 6 \cdot 16^3)_{(10)} = -(27145)_{(10)}$.

Domande e Risposte: La risposta a tutte le domande è dunque altro

5.) **Osservazioni preliminari:** Il quinto gruppo di tre quesiti riguarda l'intervallo di valori interi numerici che possono essere rappresentati in binario, complemento a 1 o complemento a 2, con un prefissato gruppo di bit.

In *binario* il numero più *piccolo* corrisponde alla stringa con tutti i bit uguali a 0, che codifica $N_{min} = 0$;

In *complemento a 1* e *2* il numero più *piccolo* rappresentabile in n bit corrisponde alla stringa con primo bit uguale a 1 e gli n-1 bit successivi tutti uguali a 0. Tale stringa codifica in complemento a 1 il numero $N_{min} = -2^{n-1}+1$ mentre in complemento a 2 il numero $N_{min} = -2^{n-1}$. (In particolare per $n = 6$ la stringa 100000 rappresenta il numero -31 in complemento a 1 e -32 in complemento a 2.)

In *binario* il numero più *grande* corrisponde alla stringa con tutti i bit uguali a 1, che codifica il numero $N_{max} = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$.

In *complemento a 1* e *2* il numero più *grande* corrisponde alla stringa con tutti i bit uguali a 1 eccetto il primo che è uguale a 0. Tale stringa codifica sia in complemento a 1 che in complemento a 2 il numero $N_{max} = 2^{n-1} - 1$.

Riassumendo, se abbiamo a disposizione n bit allora l'intervallo dei valori rappresentabili è dato, a seconda del tipo di codifica, come nella seguente tabella:

Binario	Complemento a 1	Complemento a 2
$0, \dots, 2^n - 1$	$-2^{n-1}+1, \dots, 2^{n-1}-1$	$-2^{n-1}, \dots, 2^{n-1}-1$

In particolare, per $n = 4, 5, 6, 7$ otteniamo

	Binario	Complemento a 1	Complemento a 2
$n = 4$	$0, \dots, 15$	$-7, \dots, 7$	$-8, \dots, 7$
$n = 5$	$0, \dots, 31$	$-15, \dots, 15$	$-16, \dots, 15$
$n = 6$	$0, \dots, 63$	$-31, \dots, 31$	$-32, \dots, 31$
$n = 7$	$0, \dots, 127$	$-63, \dots, 63$	$-64, \dots, 63$

Domande e Risposte:

(Da)(Ba)(Aa) Il numero 100000 rappresenta in complemento a 1 su 6 bit -31

(Ca) Il numero 100000 rappresenta in complemento a 2 su 6 bit -32

(Ab) Per rappresentare il numero 20 in base 2 è necessario un numero di bit pari a 5

(Bb) Per rappresentare il numero 25 in base 2 è necessario un numero di bit pari a 5

(Cb) Per rappresentare il numero 18 in base 2 è necessario un numero di bit pari a $\boxed{5}$

(Db) Per rappresentare il numero 16 in base 2 è necessario un numero di bit pari a $\boxed{5}$

(Ac) Per rappresentare il numero -32 in complemento a 2 è necessario un numero di bit pari a $\boxed{6}$

(Bc) Per rappresentare il numero -32 in complemento a 1 è necessario un numero di bit pari a $\boxed{7}$

(Cc) Per rappresentare il numero -8 in complemento a 1 è necessario un numero di bit pari a $\boxed{5}$

(Dc) Per rappresentare il numero -8 in complemento a 2 è necessario un numero di bit pari a $\boxed{4}$

6.) Considerata la seguente mappa di Karnaugh relativa alla funzione $F = F(A, B, C, D)$:

AB / CD	00	01	11	10
00	1	1	1	0
01	1	1	1	0
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

Osservazioni preliminari: Osservando la mappa di Karnaugh si riconosce che F è 1 in corrispondenza del gruppo di 8 stringhe con $B = 1$ e in corrispondenza del gruppo di 4 stringhe con $A = 0$ e $C = 0$ (vedi ovali nella figura). Dunque otteniamo che $\boxed{F = B + \bar{A} \cdot \bar{C}}$. Utilizzando le leggi di De Morgan, otteniamo anche che

$$\bar{F} = \overline{B + \bar{A} \cdot \bar{C}} = \bar{B} \cdot \overline{\bar{A} \cdot \bar{C}} = \bar{B} \cdot (A + C) = \bar{B} \cdot A + \bar{B} \cdot C$$

Domande e Risposte:

(Aa) F é sempre vera quando A é vera $\boxed{\text{F}}$

(Ba) F é sempre vera quando B é vera $\boxed{\text{V}}$

(Ca) F é sempre vera quando C é vera $\boxed{\text{F}}$

(Da) F é sempre vera quando D é vera $\boxed{\text{F}}$

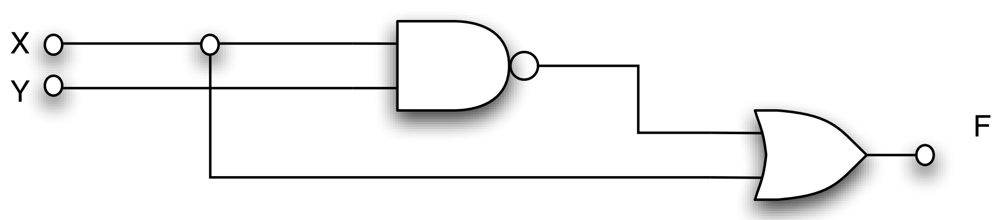
(Cc)(Bc)(Ab) $F = \bar{A}\bar{C} + B$ $\boxed{\text{V}}$

(Dc) $F = \bar{A}\bar{C} + \bar{B}$ $\boxed{\text{F}}$

(Bb)(Ac) $\bar{F} = A\bar{B} + \bar{B}C$ $\boxed{\text{V}}$

(Db)(Cb) $\bar{F} = \bar{A}B + B\bar{C}$ $\boxed{\text{F}}$

7.) Considerato il seguente circuito combinatorio



Osservazioni preliminari: Riconoscendo nel circuito le porte logiche $NAND$ e OR otteniamo che $F = X + \overline{X \cdot Y}$. Usando la Legge di De Morgan concludiamo che

$$\boxed{F = X + \overline{X \cdot Y} = X + \bar{X} + \bar{Y} = 1 + Y = 1}$$

da cui è possibile rispondere alle (Da)(Ca)(Ba)(Ab). È semplice allora usando ancora le Leggi di De Morgan rispondere alle altre domande: Infatti

- $\overline{(\overline{X+Y})\cdot X} = \overline{(\bar{X}\cdot\bar{Y})\cdot X} = \bar{0} = 1 = F$, da cui (Bc)(Aa)
- $\overline{X\cdot Y+\overline{X}} = \overline{X\cdot Y}\cdot X = (\bar{X}+\bar{Y})\cdot X = \bar{Y}\cdot X \neq F$, da cui (Db)(Cc)(Bb)(Ac)
- $\overline{(\overline{X\cdot Y})\cdot X} = X\cdot Y+\bar{X} \neq F$ da cui (Cb)
- $\overline{(\overline{X\cdot Y})+X} = X\cdot Y\cdot\bar{X} = 0 \neq F$ da cui (Dc)

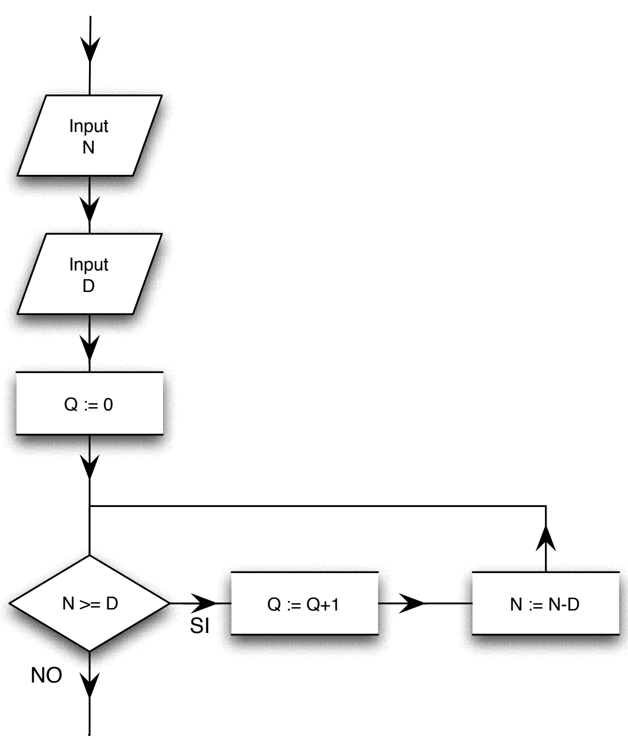
Domande e Risposte:

(Bc)(Aa)	Si ha che $F = \overline{(\overline{X+Y})\cdot X}$	$\boxed{\text{V}}$
(Cb)	Si ha che $F = \overline{(\overline{X\cdot Y})\cdot X}$	$\boxed{\text{F}}$
(Dc)	Si ha che $F = \overline{(\overline{X\cdot Y})+X}$	$\boxed{\text{F}}$
(Da)(Ba)(Ab)	Si ha che F vale	$\boxed{1}$
(Ca)	Si ha che F vale	$\boxed{\text{altro}}$
(Db)(Cc)(Bb)(Ac)	Si ha che $F = \overline{X\cdot Y+\overline{X}}$	$\boxed{\text{F}}$

8.) Definite tre variabili intere N, D, Q e considerata la seguente parte di codice:

```
readln(N);
readln(D);
Q:=0;
while D<= N do
begin
          Q:=Q+1;
          N:=N-D;
end
```

Osservazioni preliminari: Il programma riceve da input i dati N e D come valori interi, inizializza a zero la variabile Q e verifica la veridicità della condizione D è minore o uguale di N. Se ciò è verificato esegue ciclicamente le istruzioni tra il begin e l'end finchè non si verifichi che D sia divenuto maggiore di N. Nell'esecuzione di tale corpo di istruzioni il valore di Q viene incrementato di 1 e il valore di N viene decrementato del valore D.



Si può rispondere alle domande (Aa)(Ba)(Cb)(Db) (Ac)(Bb) simulando a mente le operazioni che compierebbe il programma nei vari casi.

In un secondo gruppo di domande, (Ab)(Bc)(Ca), si chiede cosa accadrebbe se si introducesse $D = 0$ e $N > 0$. In questo caso essendo vero che $D < N$ si entra nel corpo del while. Mentre però l'assegnazione Q:=Q+1 muta il valore attuale di Q, incrementandolo di 1, l'assegnazione N:=N-D non ha alcun effetto sul valore di N. Non variando D ed N non varia nemmeno il valore di veridicità della condizione $D < N$ che, rimanendo sempre vera, ha l'effetto di far ripetere all'infinito le istruzioni tra il begin e l'end (in realtà si verificherebbe una condizione di overflow su Q).

Analoga è la situazione descritta in (Dc) ove $N \geq D$ e $D < 0$. Si entra nel while e dopo aver incrementato Q di 1 il programma esegue l'operazione N:=N-D, cioè incrementa il valore di N del valore positivo $-D$. Dunque, dopo l'esecuzione di tale istruzione il valore attuale di N, essendo cresciuto, continua a rimanere più grande di D e il corpo di istruzioni viene ripetuto incrementando ulteriormente il valore di N. Questo si ripete all'infinito (in realtà si verificherebbe una condizione di overflow su N).

Notiamo infine che se, come in (Da), si immette il valore $D = 0$ e $N = -1$, o se, come in (Cc), si introducono dei valori di N e D positivi e tali che $N < D$ si ha sempre che la condizione D minore o uguale di N non è verificata e il flusso non entra nel corpo del while.

Domande e Risposte:

(Aa) se si inseriscono i valori $N = 10$, $D = 3$, all'uscita del while i valori attuali di Q e N sono $\boxed{Q = 3,\ N = 1}$

(Ba) se si inseriscono i valori $N = 15$, $D = 4$, all'uscita del while i valori attuali di Q e N sono $\boxed{\text{altro}}$

(Cb) se si inseriscono i valori $N = 8$, $D = 2$, all'uscita del while i valori attuali di Q e N sono $\boxed{Q = 4,\ N = 0}$

(Db) se si inseriscono i valori $N = 13$, $D = 7$, all'uscita del while i valori attuali di Q e N sono $\boxed{Q = 1,\ N = 6}$

(Ca)(Bc)(Ab) se si introduce il valore $D = 0$ e $N = \begin{cases} 1 & \text{(comp. } A) \\ 8 & \text{(comp. } B) \\ 2 & \text{(comp. } C) \end{cases}$, si entra in un ciclo infinito. $\boxed{\text{V}}$

(Da) se si introduce il valore $D = 0$ e $N = -1$ si entra in un ciclo infinito. $\boxed{\text{F}}$

(Bb)(Ac) se si introducono dei valori di N e D uguali e positivi, all'uscita del while il valore attuale di N è $\boxed{0}$

(Cc) se si introducono dei valori di N e D positivi e tali che $N < D$, all'uscita del while il valore attuale di N è $\boxed{N}$

(Dc) se si introducono dei valori di N e D tali che $N \geq D$ e $D < 0$, si entra in un ciclo infinito. $\boxed{\text{V}}$

9.) Considerata la funzione (compiti A, B:) $f(x) = \begin{cases} \alpha \cos(x) & |x| \leq \pi/2 \\ 0 & |x| > \pi/2 \end{cases}$ (compiti C, D:) $f(x) = \begin{cases} \alpha \sin(x + \pi/2) & |x| \leq \pi/2 \\ 0 & |x| > \pi/2 \end{cases}$

Osservazioni preliminari: Osserviamo anzitutto che $\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$ per ogni $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ e dunque in realtà l'esercizio non varia tra i compiti A, B, C, D.

La funzione f ha valori maggiori o uguali a 0. Per determinare per quali α essa risulti una densità o distribuzione di probabilità basta quindi imporre la condizione $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1}$. Visto che $f(x) = 0$ se $x \in I\!R \setminus [-\pi/2, \pi/2]$ otteniamo che deve essere

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \alpha \cos(x)\, dx = \alpha[\sin(x)]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\alpha$$

cioè $\boxed{\alpha = 1/2}$.

La funzione di ripartizione è data da $\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt}$.

Per rispondere alle domande basta ricordare che

– $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ e che dunque una funzione di distribuzione non può mai essere costantemente nulla.

– $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I\!R$ (essendo f continua). Dunque, in particolare $F'(x) = 0$ per ogni $|x| \geq \pi/2$.

Anche se non necessario per rispondere ai quesiti, determiniamo esplicitamente per esercizio $F(x)$:
Essendo $f(t) = 0$ su tutto l'intervallo $(-\infty, \pi/2)$ si ottiene

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0, \qquad \forall x \leq \pi/2.$$

Se invece $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, visto che $f(x) = \frac{\cos(t)}{2}$ per $t \in (-\pi/2, x)$, si ha

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0\,dt + \int_{-\pi/2}^{x} \frac{\cos(t)}{2}\,dt = 0 + \frac{1}{2}[\sin(t)]_{-\pi/2}^{x} = \frac{1}{2}(\sin(x) + 1).$$

Se infine $x \geq \pi/2$, essendo $f(t) = 0$ sull'intervallo $[\pi/2, x)$, otteniamo

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0\,dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{2}\,dx + \int_{\pi/2}^{x} 0\,dx = 0 + \frac{1}{2}[\sin(t)]_{-\pi/2}^{\pi/2} + 0 = 1.$$

Riassumendo, abbiamo ottenuto che la funzione di ripartizione (o di distribuzione) vale

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq \pi/2 \\ \frac{1}{2}(\sin(x) + 1) & x \in (-\pi/2, \pi/2) \\ 1 & x \geq \pi/2 \end{cases}$$

Domande e Risposte:

(Da)(Ca)(Ba)(Aa) Essa risulta una distribuzione di probabilità per α uguale a $\boxed{1/2}$

(Db)(Cc)(Bc)(Ab) La corrispondente funzione di ripartizione è comunque sempre nulla. $\boxed{\text{F}}$

(Dc)(Cb)(Bb)(Ac) La corrispondente funzione di ripartizione ha derivata nulla per $|x| > \pi/2$ $\boxed{\text{V}}$

10.) Allo scopo di stabilirne la specie, due studenti effettuano un test su degli individui di una certa popolazione. È noto che la popolazione è composta nel $\begin{cases} 20 & \text{compito A, B} \\ 10 & \text{compito C, D} \end{cases}$ per cento dei casi da individui di specie $\mathcal{A}$ e nel restante $\begin{cases} 80 & \text{compito A, B} \\ 90 & \text{compito C, D} \end{cases}$ per cento dei casi da individui di specie $\mathcal{B}$. Il primo studente compie in media due errori su cento il secondo 8 su cento.

Osservazioni preliminari: Dal testo del problema otteniamo la probabilità dei seguenti eventi

– $\mathcal{A}$= l'individuo è della specie $\mathcal{A}$. $P(\mathcal{A}) = \begin{cases} 0.2 & \text{compito A, B} \\ 0,1 & \text{compito C, D} \end{cases}$

– $\mathcal{B}$= l'individuo è della specie $\mathcal{B}$. $P(\mathcal{B}) = \begin{cases} 0.8 & \text{compito A, B} \\ 0,9 & \text{compito C, D} \end{cases}$

Sappiamo anche che il primo studente sbaglia nel 2% dei casi e dunque le sue osservazioni sono corrette nel 98% dei casi. Il secondo nell'8% dei casi e dunque le sue osservazioni sono corrette nel 92% dei casi

I quesiti riguardano anche un ulteriore evento:

– E= il primo studente dice che l'individuo è della specie $\mathcal{A}$ e il secondo studente dice che l'individuo è della specie $\mathcal{B}$

Si tratta di capire (quesito c) a chi è ragionevole dare ragione. Per risolvere il problema si può utilizzare la formula di Bayes.

Il primo quesito ci chiede di determinare la probabilità dell'evento E supposto che l'individuo sia della specie $\mathcal{A}$. Ci chiede cioè di determinare la probabilità di E condizionata ad $\mathcal{A}$: $P(E|\mathcal{A})$.

Supposto che $\mathcal{A}$ sia vero allora E accade solo qualora il primo studente faccia l'osservazione giusta e il secondo sbagliata. Dunque

$$\boxed{P(E|\mathcal{A}) = 0.98 \cdot 0.08 = 0.0784}$$

Il secondo quesito ci chiede di determinare la probabilità dell'evento E supposto che l'individuo sia della specie $\mathcal{B}$. Ci chiede cioè di determinare la probabilità di E condizionata a $\mathcal{B}$: $P(E|\mathcal{B})$. Ragionando come nel caso precedente otteniamo

$$\boxed{P(E|\mathcal{B}) = 0.02 \cdot 0.92 = 0.0184}$$

Il terzo quesito ci chiede, supposto E di determinare la probabilità di $\mathcal{A}$ e la probabilità di $\mathcal{B}$ cioè $P(\mathcal{A}|E)$ e $P(\mathcal{B}|E)$. Dalla formula di Bayes si ha

$$P(\mathcal{A}|E) = \frac{P(E|\mathcal{A})P(\mathcal{A})}{P(E|\mathcal{A})P(\mathcal{A}) + P(E|\mathcal{B})P(\mathcal{B})} = \begin{cases} \frac{0.0784 \cdot 0.2}{0.0784 \cdot 0.2 + 0.0184 \cdot 0.8} & \text{(compito A, B)} \\ \frac{0.0784 \cdot 0.1}{0.0784 \cdot 0.1 + 0.0184 \cdot 0.9} & \text{(compito C, D)} \end{cases} \sim \begin{cases} 0.52 & \text{(compito A, B)} \\ 0.32 & \text{(compito C, D)} \end{cases}$$

$$P(\mathcal{B}|E) = \frac{P(E|\mathcal{B})P(\mathcal{A})}{P(E|\mathcal{A})P(\mathcal{A}) + P(E|\mathcal{B})P(\mathcal{B})} = \begin{cases} \frac{0.0184 \cdot 0.8}{0.0784 \cdot 0.2 + 0.0184 \cdot 0.8} & \text{(compito A, B)} \\ \frac{0.0184 \cdot 0.9}{0.0784 \cdot 0.1 + 0.0184 \cdot 0.9} & \text{(compito C, D)} \end{cases} \sim \begin{cases} 0.48 & \text{(compito A, B)} \\ 0.68 & \text{(compito C, D)} \end{cases}$$

Domande e Risposte:

(Da)(Ca)(Ba)(Aa) Operato il test su un individuo della specie A il primo studente dice che esso è della specie A ed il secondo della specie B con probabilità $\boxed{0.0784}$

(Db)(Cb)(Bb)(Ab) Operato il test su un individuo della specie B il primo studente dice che esso è della specie A ed il secondo della specie B con probabilità $\boxed{0.0184}$

(Bc)(Ac) Se il primo studente dice che un certo individuo è della specie A ed il secondo studente che è della specie B é più probabile che l'individuo sia della specie A. $\boxed{\text{V}}$

(Dc)(Cc) Se il primo studente dice che un certo individuo è della specie A ed il secondo studente che è della specie B é più probabile che l'individuo sia della specie B. $\boxed{\text{V}}$