Analisi Matematica 1
prima prova scritta del 6/12/2004

(1) Enunciare e dimostrare il Teorema di esistenza degli zeri per funzioni continue.

(2) Definizione di derivata e significato geometrico.

(3) Sia $f(x)$ funzione positiva, derivabile e convessa in $\mathbb{R}$ tale che $f'(0) > 0$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

B. $f(x)$ ammette minimo in $\mathbb{R}$.

(4) Sia $f(x)$ funzione continua in $[2, +\infty)$ tale che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\int_2^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2} dx$ converge.

B. $\int_2^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ converge.

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera. Infatti, essendo $f(x)$ convessa e derivabile in $\mathbb{R}$, si ha che la retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $x = 0$ risulta retta di supporto per $f(x)$ in tutto $\mathbb{R}$, ovvero si ha che

$$f(x) \geq f(0) + f'(0)x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Essendo $f'(0) > 0$, otteniamo che $\lim_{x\to+\infty}[f(0) + f'(0)x] = +\infty$ e dal Teorema del confronto si deduce che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
In alternativa si poteva osservare che essendo $f(x)$ convessa in $\mathbb{R}$, $f'(x)$ risulta crescente in $\mathbb{R}$ e quindi che

$$f'(x) \geq f'(0) \quad \forall x > 0$$

Dalla formula fondamentale del calcolo integrale si ottiene allora che

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt \geq f(0) + f'(0)x \quad \forall x > 0$$

e si potrà concludere utilizzando il Teorema del confronto essendo $\lim_{x\to+\infty}[f(0) + f'(0)x] = +\infty$.
Una nota su un errore frequente. Dalla monotonia di $f'(x)$ essendo $f'(0) > 0$, si deduce che $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$ e quindi che $f(x)$ è strettamente crescente in $(0, +\infty)$. Da ciò NON si può concludere che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ma solo che esiste il limite a $+\infty$ con

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sup_{x\in(0,+\infty)} f(x)$$

Tale limite, per una generica funzione strettamente crescente potrebbe anche essere finito. Si pensi ad esempio alla funzione $g(x) = \arctan x + \pi$, tale funzione è positiva, derivabile e strettamente crescente (ma non convessa) in $\mathbb{R}$ con $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{3}{2}\pi$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È falsa. La funzione $f(x) = e^x$ è funzione positiva, derivabile e convessa in $\mathbb{R}$ con $f'(0) = 1 > 0$ che non ammette minimo in $\mathbb{R}$.

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera. Infatti, essendo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, dalla definizione di limite si ha che esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| < 1$ per ogni $x > M$. Ne segue che

$$\left|\frac{f(x)}{x^2}\right| < \frac{1}{x^2} \quad \forall x > M$$

ed essendo l'integrale $\int_M^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ convergente, dal criterio del confronto si ottiene che l'integrale $\int_2^{+\infty} \left| \frac{f(x)}{x^2} \right| dx$ converge e quindi anche l'integrale dato. In alternativa si poteva applicare il criterio del confronto asintotico osservato che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{f(x)}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$\boxed{\mathbf{B}}$ È falsa. La funzione $f(x) = \frac{1}{\log x}$ è funzione continua in $[2, +\infty)$ con $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ma l'integrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log x} dx$ diverge. L'ultima affermazione segue essendo

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log x} dx &= \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{1}{x \log x} dx = \lim_{b\to+\infty} [\log(\log x)]_2^b \\ &= \lim_{b\to+\infty} \log(\log b) - \log(\log 2) = +\infty.\end{aligned}$$

Analisi Matematica 1
prima prova scritta del 21/12/2004

(1) Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle.

(2) Illustrare il concetto di funzione integrabile secondo Riemann.

(3) Siano (a_n) e (b_n) due successioni tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \ell \in I\!R$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$.

B. $e^{a_n} \sim e^{b_n}$ per $n \to +\infty$.

(4) Sia $f(x)$ funzione continua e strettamente crescente in $[0, +\infty)$ con $f(0) = 0$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

B. $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ diverge .

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\mathbf{A}}$ È falsa. Si pensi ad esempio alle successioni $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n^2}$. Tali successioni convergono entrambe allo stesso limite $\ell = 0$ per $n \to +\infty$ pur non essendo asintotiche:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n} = +\infty$$

Si osservi che se invece il limite ℓ risulta finito non nullo allora le due successioni risultano asintotiche.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È vera. Infatti essendo $\lim_{n\to+\infty} a_n - b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n - \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$ e $\lim_{n\to+\infty} e^{x_n} = 1$ per ogni successione $x_n \to 0$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{a_n}}{e^{b_n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{a_n - b_n} = 1$$

(4) $\boxed{\mathbf{A}}$ È falsa. La funzione $f(x) = \arctan x$ è funzione continua, strettamente crescente in $[0, +\infty)$ con $f(0) = 0$ e tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È vera. Infatti, essendo $f(x)$ strettamente crescente in $[0, +\infty)$, si ha che $f(x) \geq f(1) = m > f(0) = 0$ per ogni $x \geq 1$. Essendo $\int_1^{+\infty} m\, dx$ divergente, dal criterio del confronto si conclude che l'integrale dato diverge.

In alternativa si poteva ricordare che condizione necessaria alla convergenza dell'integrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ è che, se esiste, il limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ risulti uguale a zero. Nel caso proposto, essendo $f(x)$ strettamente crescente in $[0, +\infty)$ con $f(0) = 0$, dalle proprietà delle funzioni monotone si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sup\{f(x) \mid x \in [0, +\infty)\} = \ell > f(0) = 0$$

Poichè esiste il $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ed è diverso da zero, da quanto ricordato sopra segue che l'integrale dato non può convergere. Essendo inoltre $f(x) \geq f(0) = 0$ per ogni $x \in [0, +\infty)$, l'integrale risulta divergente,

Analisi Matematica 1
prima prova scritta del 10/01/2005

(1) Enunciare e dimostrare il Teorema fondamentale del calcolo integrale.

(2) Dare la definizione di funzione convessa in un intervallo aperto ed enunciare i criteri di convessità.

(3) Sia a_n una successione convergente e sia b_n una successione limitata.
Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. La successione $c_n = a_n b_n$ è convergente.

B. La successione $c_n = a_n + b_n$ è limitata.

(4) Sia $f(x)$ funzione continua e limitata in $[1, +\infty)$ e sia $F(x) = \int_1^x f(t)dt$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0.$

B. $\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x^2} = 0$.

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\mathbf{A}}$ È falsa. Si pensi al seguente esempio. La successione $a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ è convergente ad 1, la successione $b_n = (-1)^n$ è limitata mentre la successione prodotto $c_n = \frac{n+1}{n}(-1)^n$ non è convergente.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È vera. Infatti ogni successione convergente è limitata e la somma di successioni limitate è limitata.

(4) $\boxed{\mathbf{A}}$ È falsa. Consideriamo ad esempio la funzione $f(x) = 1$, continua e limitata in $[1, +\infty)$. Si ha $F(x) = \int_1^x f(t)dt = x - 1$ e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x} = 1 \neq 0$$

$\boxed{\mathbf{B}}$ È vera. Infatti, l'affermazione segue dal Teorema di De L'Hôpital poichè

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F'(x)}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{2x} = 0,$$

essendo $f(x)$ funzione limitata.

Analisi Matematica 1
prima prova scritta del 21/03/2005

(1) Enunciare e dimostrare il Teorema di regolarità delle successioni monotone.

(2) Fornire la definizione di massimo e minimo locale per una funzione ed esporre una condizione necessaria ed una condizione sufficiente affinché un punto sia di massimo o minimo locale.

(3) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte in $\mathbb{R}$ e tale che $f''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ non ammette massimo in $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $f(x)$ non ammette massimo in $[0, 1[$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata .
Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(x)$ è integrabile. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. Se $f(x)$ è integrabile, allora è continua. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera. Per provarlo è sufficiente osservare che poichè $f''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, la funzione risulta strettamente convessa in $\mathbb{R}$ e per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}.$$

Se x_0 fosse punto di massimo per f in $\mathbb{R}$, dal Teorema di Fermat avremo che $f'(x_0) = 0$ e quindi, dalla diseguaglianza sopra, $f(x) > f(x_0)$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, contro l'ipotesi x_0 punto di massimo.

In alternativa si poteva osservare che la condizione $f''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ implica che $f'(x)$ risulta strettamente crescente in $\mathbb{R}$. Se x_0 fosse punto estremo per f in $\mathbb{R}$, dal Teorema di Fermat avremo che $f'(x_0) = 0$ e quindi $f'(x) < 0$ per $x < x_0$ mentre $f'(x) > 0$ per $x > x_0$. Ciò implica che la funzione è strettamente decrescente in $(-\infty, x_0)$ e strettamente crescente in $(x_0, +\infty)$, da cui $f(x) > f(x_0)$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. Ciò prova che ogni punto estremo per f in $\mathbb{R}$ è necessariamente un punto di minimo.

$\boxed{\textbf{B}}$ È falsa. La funzione $f(x) = e^{-x}$, derivabile due volte in $\mathbb{R}$ con $f''(x) = e^{-x} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ammette massimo nell'intervallo $[0, 1)$ e precisamente nel punto $x_0 = 0$ con $f(0) = 1$.

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa. La funzione di Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

è un classico esempio di funzione limitata ma non integrabile in alcun intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ (si vedano gli appunti del corso).

$\boxed{\textbf{B}}$ È falsa. Si consideri ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{se } x \in (1, 2] \end{cases}$$

Tale funzione è integrabile in $[0, 2]$, essendo monotona, con $\int_0^2 f(x)dx = 1$ ma non è continua in tale intervallo.

Analisi Matematica 1
prima prova scritta del 08/04/2005

(1) Enunciare e dimostrare il Criterio di monotonia per funzioni derivabili.

(2) Fornire la definizione di integrale improprio su intervallo illimitato ed esporre un criterio per stabilire la convergenza di tale integrale.

(3) Siano (a_n) e (b_n) due successioni tali che la successione prodotto $(a_n b_n)$ risulti convergente.
Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. (a_n) e (b_n) sono convergenti. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. (a_n) e (b_n) sono limitate. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Sia $f : [a, b] \to I\!R$ una funzione continua e crescente e sia $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.
Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $F(x)$ è crescente in $[a, b]$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $F(x)$ è convessa in (a, b). $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\mathbf{A}}$ e $\boxed{\mathbf{B}}$ sono entrambe false. Per provarlo è sufficiente considerare le successioni $a_n = n$ e $b_n = \frac{1}{n}$. Il loro prodotto $a_n b_n = 1$ è successione costante ma la successione a_n non risulta ne' convergente ne' limitata.

(4) $\boxed{\mathbf{A}}$ È falsa. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la funzione $F(x)$ risulta derivabile in (a, b) con $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in (a, b)$. Affinchè risulti crescente è necessario che $F'(x) = f(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$. Sarà quindi sufficiente considerare una qualunque funzione $f(x)$ continua, crescente e negativa in (a, b) (ad esempio $f(x) = -1$) per avere un controesempio di funzione integrale $F(x)$ non crescente (nell'esempio, $F(x) = a - x$ è funzione decrescente).

$\boxed{\mathbf{B}}$ È vera. Per quanto ricordato sopra, $F(x)$ è derivabile in (a, b) con $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in (a, b)$. Essendo per ipotesi $F'(x) = f(x)$ crescente in (a, b), dai criteri sulle funzioni convesse. si deduce immediatamente che $F(x)$ è convessa in (a, b).
In alternativa si poteva osservare che per ogni $x_0 \in (a, b)$, essendo $f(x)$ crescente, dai teoremi di confronto per l'integrale definito risulta

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \geq f(x_0)(x - x_0) \quad \forall x \in (a, b)$$

e quindi che la retta $y = F(x_0) + f(x_0)(x - x_0)$ è di supporto per $F(x)$ nell'intervallo (a, b).

Analisi Matematica 1
Prima prova scritta del 27/06/2005

(1) Fornire la definizione di funzione integrale e stabilire se è continua, derivabile.

(2) Fornire la definizione e la caratterizzazione di estremo superiore e dimostrare il teorema che ne assicura l'esistenza.

(3) Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo limitato e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua.
Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $f(I)$ è un insieme limitato. Vero Falso

B. $f(I)$ è un intervallo. Vero Falso

(4) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile.
Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. f è continua. Vero Falso

B. f è integrabile. Vero Falso

C. f è invertibile. Vero Falso

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\textbf{A}}$ È falsa. Per provarlo è sufficiente considerare l'intervallo limitato $I = (0, 1)$ e la funzione continua $f(x) = \frac{1}{x}$.

$\boxed{\textbf{B}}$ È vera, segue dal Teorema dei valori intermedi.

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È vera, come provato in un noto teorema sulle funzioni derivabili.

$\boxed{\textbf{B}}$ È vera, in quanto ogni funzione continua risulta integrabile.

$\boxed{\textbf{C}}$ È falsa, poichè esistono funzioni derivabili non iniettive. Basti pensare alla funzione $f(x) = \sin x$ nell'intervallo $[0, \pi]$.

Analisi Matematica 1
prima prova scritta del 11/07/2005

(1) Enunciare e dimostrare la regola di derivazione della funzione composta.

(2) Dare la definizione di funzione monotona e fornire una condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione monotona risulti continua.

(3) Sia $f : [a, b] \to I\!R$ una funzione limitata.
Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. f ammette massimo e minimo in $[a, b]$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. esiste $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ per ogni $x_0 \in [a, b]$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Sia $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ una funzione continua tale che l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} x f(x) dx$ risulti convergente. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $\int_1^{+\infty} x^2 f(x) dx$ converge. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\textbf{A}}$ È falso. Infatti, presa la funzione $f : [0,1] \to I\!R$ definita da $f(x) = x$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 1$, questa risulta limitata ma non ammette minimo in $[0,1]$. Analogalmente si possono dare semplici esempi di funzioni limitate che non ammettono massimo o che non ammettono nè massimo nè minimo.

$\boxed{\textbf{B}}$ È falso, ad esempio la funzione parte intera $f(x) = [x]$ in $[0,2]$ non ammette limite per $x \to 1$.

(4) $\boxed{\textbf{A}}$ È vero. Infatti risulta $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [1, +\infty)$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{xf(x)} = 0$. Quindi, dal criterio del confronto asintotico, essendo $\displaystyle\int_1^{+\infty} xf(x)dx$ convergente, anche $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.

$\boxed{\textbf{B}}$ È falso. Infatti, presa $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, si ha che $\displaystyle\int_1^{+\infty} xf(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge mentre $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ diverge.

Analisi Matematica 1
prima prova scritta del 06/09/2005

(1) Enunciare e dimostrare il Teorema di integrabilità delle funzioni monotone.

(2) Illustrare il concetto di derivata, fornire la regola di derivazione della funzione inversa e dimostrare che $D(\arctan x) = \frac{1}{x^2+1}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(3) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = 0$. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. Esiste un unico $m \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \geq m(x - x_0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Sia $(b_n)_{n \geq 1}$ una successione strettamente crescente tale che $b_1 = 0$ e $b_n \to 1$. Posto $a_n = (-1)^n b_n$, provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\max\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n = 1$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n = -1$. $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\mathbf{A}}$ È falsa. Infatti, la funzione valore assoluto $f(x) = |x|$ è convessa in $I\!R$ ma nel punto $x_0 = 0$ ammette infinite rette di supporto e precisamente si ha che per ogni $m \in [-1, 1]$ risulta $|x| \geq mx$, $\forall x \in I\!R$.
Si osservi che l'affermazione risulta vera se si considerano funzioni derivabili in x_0, infatti in tal caso la disuguaglianza è verificata solo da $m = f'(x_0)$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È falsa, ad esempio la funzione $f(x) = -\log x$ è convessa in $I\!R$ con $f(1) = 0$ ma $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

(4) $\boxed{\mathbf{A}}$ È falsa. Si consideri la successione $b_n = 1 - \frac{1}{n}$, strettamente crescente con $b_1 = 0$ e $b_n \to 1$ per $n \to +\infty$. Osservato che $0 \leq b_n < 1$ per ogni $n \in I\!N$, si ottiene che $a_n = (-1)^n b_n$ è successione limitata con $-1 < a_n < 1$ per ogni $n \in I\!N$. Quindi tale successione non ammette come valore massimo 1.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È vero. Infatti, essendo b_n successione strettamente crescente, risulta $\sup_{n\in I\!N} b_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 1$ ed inoltre $b_n \geq b_1 = 0$ per ogni $n \in I\!N$. Si ottiene allora che per ogni $n \in I\!N$ risulta $a_{2n} > 0 \geq a_{2n+1}$ e che a_{2n+1} è successione strettamente decrescente con $a_{2n+1} \to -1$ per $n \to +\infty$. Allora

$$\inf_{n\in I\!N} a_n = \inf_{n\in I\!N} a_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = -1$$

Analisi Matematica 1
prima prova scritta del 3/10/2005

(1) Dare la definizione di funzione integrabile e di integrale definito, illustrando le principali proprietà dell'integrale (additività, linearità, ...).

(2) Enunciare e dimostrare il Teorema di regolarità delle successioni monotone.

(3) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotona. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. f è limitata $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. f è continua $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. f è invertibile $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

(4) Sia $(a_n)_{n\geq 1}$ una successione divergente. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

A. $\arctan(a_n)$ è convergente $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

B. $\sin(a_n)$ è indeterminata $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

C. e^{a_n} è divergente $\boxed{\text{Vero}}$ $\boxed{\text{Falso}}$

Soluzione

Per i quesiti **(1)** e **(2)** consultare il libro di testo e/o gli appunti del corso.

(3) $\boxed{\mathbf{A}}$ È vera. Infatti, se la funzione è strettamente crescente allora $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ per ogni $x \in [a,b]$ mentre se è strettamente decrescente allora $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$ per ogni $x \in [a,b]$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È falsa, ad esempio la funzione $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1) \\ x+1 & \text{se } x \in [1,2] \end{cases}$ è strettamente crescente in $[0,2]$ ma non è continua nel punto $x = 1$.

$\boxed{\mathbf{C}}$ È vera, infatti ogni funzione strettamente monotona è iniettiva e risulta quindi invertibile sul suo codominio.

(4) $\boxed{\mathbf{A}}$ È vera. Infatti, se $a_n \to \pm\infty$ allora $\arctan(a_n) \to \pm\frac{\pi}{2}$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ È falsa. Considerata ad esempio la succesione $a_n = n\pi$ risulta $a_n \to +\infty$ mentre $\sin(a_n)$ è convergente essendo $\sin(a_n) = \sin(n\pi) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\mathbf{C}}$ È falsa. Infatti, se $a_n \to -\infty$ allora $e^{a_n} \to 0$.