Analisi Matematica 1
seconda prova scritta del 9/12/2004

(1) La successione $\dfrac{e^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$

$\boxed{\text{a}}$ converge ad e $\boxed{\text{b}}$ converge a $\sqrt{e}$

$\boxed{\text{c}}$ diverge $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(2) L'integrale $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{x}{\sin x} - 1\right)^{\alpha} dx$ con $\alpha \in I\!R$

$\boxed{\text{a}}$ converge se e solo se $\alpha > 0$ $\boxed{\text{b}}$ converge per ogni $\alpha < -2$

$\boxed{\text{c}}$ non converge per alcun α $\boxed{\text{d}}$ converge se e solo se $\alpha > -\frac{1}{2}$

(3) La funzione $f(x) = \arctan\sqrt{\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|}$

$\boxed{\text{a}}$ ha un asintoto obliquo $\boxed{\text{b}}$ ammette minimo

$\boxed{\text{c}}$ è monotona $\boxed{\text{d}}$ è derivabile nel suo dominio

(4) L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)^2}$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{b}}$ 0

$\boxed{\text{c}}$ $-\frac{\pi}{2}$ $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(5) La funzione $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{a-1}{x}} & \text{se } x > 0 \\ x + a & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ nel punto $x = 0$

$\boxed{\text{a}}$ è continua in $\forall a \in I\!R$ $\boxed{\text{b}}$ è continua ma non derivabile $\forall a \geq 1$

$\boxed{\text{c}}$ è derivabile $\forall a > 1$ $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

(6) La funzione $f(x) = \sqrt{1-x^4} - \cos(x^2)$ per $x \to 0$ ha ordine di infinitesimo

$\boxed{\text{a}}$ 4 $\boxed{\text{b}}$ 8

$\boxed{\text{c}}$ 6 $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, osservato che

$$\frac{e^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \frac{e^n}{e^{n^2\log(1+\frac{1}{n})}} = e^{n-n^2\log(1+\frac{1}{n})}$$

possiamo limitarci a determinare il comportamento della successione $n - n^2\log(1+\frac{1}{n})$. A tale scopo, ricordando che $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$, posto $x = \frac{1}{n}$ si ottiene

$$n - n^2\log(1+\frac{1}{n}) = n - n^2(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{2} + o(1)$$

per $n \to +\infty$. Ne segue che $\lim_{n\to+\infty} n-n^2\log(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$ e dunque che $\lim_{n\to+\infty} e^{n-n^2\log(1+\frac{1}{n})} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Infatti, ricordando che per $x \to 0$, $\sin x \sim x$ e $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, da cui $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$, otteniamo

$$\frac{x}{\sin x} - 1 = \frac{x - \sin x}{x} \sim \frac{\frac{x^3}{6}}{x} = \frac{x^2}{6}$$

e dunque che

$$\left(\frac{x}{\sin x} - 1\right)^\alpha \sim \frac{x^{2\alpha}}{6^\alpha}$$

per ogni $\alpha \in I\!R$. Poichè l'integrale $\int_0^1 x^{2\alpha}dx$ converge se e solo se $2\alpha > -1$, dal criterio del confronto asintotico, l'integrale dato risulta convergente se e solo se $\alpha > -\frac{1}{2}$.

(3) La risposta esatta è $\boxed{\text{b}}$. Infatti, osservato che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \neq -1$ e che $f(1) = 0$, si ottiene immediatamente che $x = 1$ è punto di minimo per $f(x)$. Al medesimo risultato si poteva arrivare osservato che $dom(f) = I\!R \setminus \{-1\}$ e che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$. Dunque $\boxed{\text{a}}$ è falsa. La funzione risulta poi continua in $dom(f)$ e derivabile in $dom(f) \setminus \{1\}$ con

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x(x+1)}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} & \text{se } x < -1 \text{ e } x > 1 \\ -\frac{1}{2(x+1)}\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}$$

dunque $\boxed{\text{d}}$ è falsa e poichè il segno di $f'(x)$ non è costante, anche $\boxed{\text{c}}$ è falsa. Dallo studio del segno di $f'(x)$ si deduce anche che $x = 1$ è un minimo.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, ponendo $t = \sqrt{x}$ otteniamo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)^2} = 2\int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = 2\int \frac{dt}{1+t^2} - 2\int \frac{t^2}{1+t^2}dt$$
$$= 2\arctan t + \int t\frac{-2t}{1+t^2}dt$$

Per calcolare l'ultimo integrale si può procedere integrando per parti riconoscendo $\frac{-2t}{(1+t^2)^2} = D(\frac{1}{1+t^2})$:

$$\int t \frac{-2t}{1+t^2} dt = \frac{t}{1+t^2} - \int \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{t}{1+t^2} - \arctan t + c$$

Allora

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)^2} = \arctan \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{1+x} + c$$

e quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)^2}$$
$$= \lim_{a\to 0^+} \left[\arctan \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{1+x}\right]_a^1 + \lim_{b\to+\infty} \left[\arctan \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{1+x}\right]_1^b = \frac{\pi}{2}$$

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Infatti, osservato che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } a < 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

mentre $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$, otteniamo che la funzione data è continua in $x = 0$ se e solo se $a = 0$ oppure $a = 1$. Quindi $\boxed{\text{a}}$ e $\boxed{\text{b}}$ sono false. Anche $\boxed{\text{c}}$ è falsa poichè non essendo f continua in $x = 0$ per $a > 1$ non potrà nemmeno essere derivabile.

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti ricordando che $(1+y)^\alpha = 1+\alpha y+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}y^2+o(y^2)$ per $y \to 0$, ponendo $y = -x^4$ e $\alpha = \frac{1}{2}$, otteniamo

$$\sqrt{1-x^4} = 1 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{8} + o(x^8), \quad x \to 0$$

Inoltre, essendo $\cos y = \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{24} + o(y^4)$ per $y \to 0$, ponendo $y = x^2$ otteniamo

$$\cos(x^2) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{24} + o(x^8), \quad x \to 0$$

Allora

$$f(x) = \sqrt{1-x^4} - \cos(x^2) = -\frac{x^8}{8} + \frac{x^8}{24} + o(x^8) = -\frac{x^8}{12} + o(x^8), \quad x \to 0$$

e $ord(f(x)) = 8$.

Analisi Matematica 1
seconda prova scritta del 23/12/2004

Domanda filtro Risolvere la disequazione $|\frac{2}{x}| \geq 1 - x$.

1) La funzione $f(x) = \log(1 + e^x)$

$\boxed{\text{a}}$ ammette un asintoto obliquo
$\boxed{\text{b}}$ è limitata
$\boxed{\text{c}}$ ammette minimo
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

2) L'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3}}{\arctan \frac{1}{x^\alpha}}\, dx$

$\boxed{\text{a}}$ converge se e solo se $\alpha \leq 0$
$\boxed{\text{b}}$ diverge se e solo se $\alpha \geq \frac{1}{3}$
$\boxed{\text{c}}$ converge se e solo se $\alpha < \frac{1}{2}$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

3) La funzione $f(x) = x^2 - \log\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$ per $x \to 0$

$\boxed{\text{a}}$ ha ordine di infinitesimo 2
$\boxed{\text{b}}$ è $o(x^4)$
$\boxed{\text{c}}$ ha ordine di infinitesimo 4
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

4) L'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x^3}}\, dx$

$\boxed{\text{a}}$ diverge
$\boxed{\text{b}}$ converge e vale $e - 2$
$\boxed{\text{c}}$ converge e vale $4 - 2e$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

5) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0 \end{cases}$

$\boxed{\text{a}}$ non è continua per alcun $\alpha \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{b}}$ se $\alpha = 1$ è derivabile con $f'(0) = \frac{1}{2}$
$\boxed{\text{c}}$ se $\alpha = 1$ è continua ma non derivabile
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

6) L'equazione $|\log x| = \dfrac{\alpha}{x}$,

$\boxed{\text{a}}$ non ammette soluzioni per ogni $\alpha > 1$
$\boxed{\text{b}}$ ammette una sola soluzione per $\alpha \geq 1$
$\boxed{\text{c}}$ ammette tre soluzioni per $0 < \alpha < e$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Soluzione

Domanda filtro: $x \geq -1,\ x \neq 0$

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e scrivendo $f(x) = x + \log(1+e^{-x})$ si ottiene immediatamente

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \log(1+e^{-x})}{x} = 1$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \log(1+e^{-x}) = 0$$

Quindi $y = x$ è asintoto obliquo destro per $f(x)$.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, osserviamo innanzitutto che per $x \to +\infty$ si ha

$$\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3} = \frac{1}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+1} \sim \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

Mentre si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan\frac{1}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ \frac{\pi}{4} & \text{se } \alpha = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

Ne segue che se $\alpha < 0$ allora per $x \to +\infty$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3}}{\arctan\frac{1}{x^\alpha}} \sim \frac{1}{2\sqrt{x^3}}\frac{2}{\pi} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

ed essendo $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ convergente, dal criterio del confronto asintotico si deduce che l'integrale dato converge. Analogalmente se $\alpha = 0$.
Se $\alpha > 0$, ricordando che $\arctan y \sim y$ per $y \to 0$, si ottiene $\arctan\frac{1}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^\alpha}$ per $x \to +\infty$ e quindi

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3}}{\arctan\frac{1}{x^\alpha}} \sim \frac{1}{2\sqrt{x^3}}x^\alpha = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}-\alpha}}$$

Essendo $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}-\alpha}}$ convergente se e solo se $\frac{3}{2}-\alpha > 1$, dal criterio del confronto asintotico si deduce che per $\alpha > 0$ l'integrale dato converge se e solo se $\alpha < \frac{1}{2}$. Riunendo i risultati ottenuti si deduce che l'integrale converge se e solo se $\alpha < \frac{1}{2}$.

(3) La risposta esatta è $\boxed{\text{b}}$. Infatti ricordando che $\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ per $y \to 0$, per $x \to 0$ risulta

$$f(x) = x^2 - \log\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} = x^2 - \frac{1}{2}(\log(1+x^2) - \log(1-x^2)) =$$
$$= x^2 - \frac{1}{2}(x^2 - \frac{x^4}{2} + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)) = o(x^4)$$

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Infatti, operando la sostituzione $t = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (e quindi $x = \frac{1}{t^2}$ e $dx = -2\frac{1}{t^3}dt$), si ottiene

$$\int \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1}{\sqrt{x^3}}dx = -2\int (e^t - 1)dt = -2(e^t - t) + c = -2(e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - \frac{1}{\sqrt{x}}) + c$$

e dunque

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1}{\sqrt{x^3}}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1}{\sqrt{x^3}}dx = -2\lim_{b\to+\infty}\left[e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right]_1^b =$$

$$= -2\lim_{b\to+\infty}(e^{\frac{1}{\sqrt{b}}} - \frac{1}{\sqrt{b}} - e + 1) = -2(2-e) = 2e - 4$$

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, osserviamo innanzitutto che per ogni $\alpha \in I\!R$, $f(x)$ è funzione derivabile in ogni $x \neq 0$ essendo rapporto di funzioni derivabili. Abbiamo poi che $\lim_{x\to0} f(x) = 1$ e dunque, essendo $f(0) = \alpha$, $f(x)$ risulterà continua in $x = 0$ se e solo se $\alpha = 1$ (quindi $\boxed{\mathbf{a}}$ è falsa). Per $\alpha = 1$, essendo $f(0) = 1$, risulta

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Quindi $f(x)$ per $\alpha = 1$ è derivabile in tutto $I\!R$ ($\boxed{\mathbf{c}}$ è falsa) con $f'(0) = \frac{1}{2}$.

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$.
Considerata la funzione $f_\alpha(x) = |\log x| - \frac{\alpha}{x}$, risolvere l'equazione data equivale a determinare gli zeri di $f_\alpha(x)$.
Studiamo quindi la funzione $f_\alpha(x)$ limitandoci a considerare il caso $\alpha > 0$.
Si ha che $f_\alpha(x)$ è definita e continua in $(0, +\infty)$. Inoltre, ricordando il limite notevole $\lim_{x\to0^+} x^a \log x = 0$ per ogni $a > 0$, si ottiene

$$\lim_{x\to0^+} f_\alpha(x) = \lim_{x\to0^+} -\frac{1}{x}(x\log x + \alpha) = -\infty$$

mentre $\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = +\infty$. Dal Teorema di esistenza degli zeri possiamo allora affermare che $f_\alpha(x)$ ammette almeno uno zero in $(0, +\infty)$ per ogni $\alpha > 0$. Quindi $\boxed{\mathbf{a}}$ è falsa. Per determinare il numero esatto degli zeri di $f_\alpha(x)$, studiamone la monotonia. A tale scopo si osservi che $f_\alpha(x)$ è derivabile in ogni $x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ con

$$f'_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x^2} = \frac{\alpha+x}{x^2} & \text{se } x > 1 \\ -\frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x^2} = \frac{\alpha-x}{x^2} & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Si ottiene immediatamente che $f'_\alpha(x) > 0$ per ogni $x > 1$, avendo supposto $\alpha > 0$. Ne segue che $f_\alpha(x)$ è strettamente crescente in $(1, +\infty)$ ed essendo $f_\alpha(1) = -\alpha < 0$ mentre

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, ne deduciamo che $f_\alpha(x) = 0$ ammette una ed una sola soluzione in $(1, +\infty)$ per ogni $\alpha > 0$.
Si osservi ora che se $\alpha \geq 1$, si ha che $\alpha - x \geq 1 - x > 0$ per ogni $0 < x < 1$ e quindi che $f'_\alpha(x) > 0$ per ogni $x \in (0, 1)$. Ne segue che $f_\alpha(x)$ è strettamente crescente in $(0, 1)$ ed essendo $\lim_{x\to0^+} f_\alpha(x) = -\infty$ e $f_\alpha(1) < 0$, ne deduciamo che $f_\alpha(x) = 0$ non ammette soluzioni in $(0, 1)$ per ogni $\alpha \geq 1$.
Dai risultati sopra segue che l'equazione data ammette una ed una sola soluzione per ogni $\alpha \geq 1$. Quindi $\boxed{\mathbf{c}}$ è falsa e $\boxed{\mathbf{b}}$ è vera.

In alternativa, si poteva osservare che posto $g(x) = x|\log x|$ l'equazione data è equivalente a $g(x) = \alpha$ con $\alpha \in I\!R$. Studiamo quindi l'immagine della funzione $g(x)$. Si ha innanzitutto che $g(x)$ è definita e continua in tutto $(0, +\infty)$ con $g(x) \geq 0$ per ogni $x > 0$. Inoltre

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

Dal Teorema dei valori intermedi deduciamo allora che $g(x)$ assume tutti i valori $\alpha \in [0, +\infty)$. Per conoscere il numero esatto di controimmagini di ogni $\alpha \geq 0$, studiamo la monotonia di $g(x)$. La funzione è derivabile in ogni $x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ con

$$g'(x) = \begin{cases} -(\log x + 1) & \text{se } 0 < x < 1 \\ \log x + 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Si ottiene immediatamente che $g'(x) > 0$ per ogni $x > 1$ mentre per $0 < x < 1$ si ha $g'(x) > 0$ se e solo se $\log x + 1 < 0$ e quindi se e solo se $x < \frac{1}{e}$.
Ne segue che $g(x)$ è strettamente crescente in $(0, \frac{1}{e})$ e in $(1, +\infty)$, $g(x)$ è strettamente decrescente in $(\frac{1}{e}, 1)$, $x = \frac{1}{e}$ è punto di massimo relativo per $g(x)$ con $g(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}$ mentre $x = 1$ è punto di minimo assoluto con $g(1) = 0$. Dall'analisi sopra segue che l'equazione $g(x) = \alpha$:
- ammette una sola soluzione per $\alpha > \frac{1}{e}$ e $\alpha = 0$;
- ammette due soluzioni per $\alpha = \frac{1}{e}$;
- ammette tre soluzioni per $0 < \alpha < \frac{1}{e}$;
- non ammette soluzioni per $\alpha < 0$.

Analisi Matematica 1
seconda prova scritta del 12/01/2005

Domanda filtro Risolvere la disequazione $\log(1-\frac{1}{x}) \leq 0$.

1) La successione $a_n = \dfrac{1-n(\log(n+1)-\log n)}{\sqrt{n^\alpha+1}-\sqrt{n^\alpha}}$, con $\alpha > 0$

$\boxed{\text{a}}$ converge a 0 se $\alpha > 1$

$\boxed{\text{b}}$ converge a $\frac{1}{2}$ se $\alpha = 1$

$\boxed{\text{c}}$ diverge a $+\infty$ se $\alpha > 2$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

2) L'equazione $(\alpha - x)e^x = 1$

$\boxed{\text{a}}$ ammette una soluzione per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{b}}$ ammette due soluzioni se e solo se $\alpha > 1$

$\boxed{\text{c}}$ non ammette soluzioni per $\alpha > 0$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

3) La funzione $f(x) = \arctan \dfrac{x}{x-1}$

$\boxed{\text{a}}$ ha un asintoto obliquo

$\boxed{\text{b}}$ è limitata

$\boxed{\text{c}}$ ammette massimo

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

4) La funzione $f(x) = \begin{cases} |x|^{1/x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$, nel punto 0

$\boxed{\text{a}}$ non è continua

$\boxed{\text{b}}$ è derivabile con $f'(0) = 1$

$\boxed{\text{c}}$ è continua ma non derivabile

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

5) L'integrale $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ 0

$\boxed{\text{b}}$ 1

$\boxed{\text{c}}$ $\frac{1}{2}$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

6) L'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos x^2}{x^\alpha} dx$

$\boxed{\text{a}}$ converge se e solo se $\alpha < 5$

$\boxed{\text{b}}$ converge se e solo se $\alpha < 0$

$\boxed{\text{c}}$ converge se e solo se $\alpha \geq 4$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Soluzione

Domanda filtro: $x > 1$

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, ricordando che $\log(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$, per $n \to +\infty$ si ottiene

$$1-n(\log(n+1)-\log n) = 1-n\log(1+\frac{1}{n}) = 1-n(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})) = \frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{2n}$$

mentre, ricordando che $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ per $x \to 0$, essendo $\alpha > 0$ si ottiene

$$\sqrt{n^\alpha+1}-\sqrt{n^\alpha} = \sqrt{n^\alpha}(\sqrt{1+\frac{1}{n^\alpha}}-1) = \sqrt{n^\alpha}(\frac{1}{2n^\alpha}+o(\frac{1}{n^\alpha})) = \frac{1}{2n^{\frac{\alpha}{2}}}+o(\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}) \sim \frac{1}{2n^{\frac{\alpha}{2}}}$$

Quindi per $n \to +\infty$ si ha

$$\frac{1-n(\log(n+1)-\log n)}{\sqrt{n^\alpha+1}-\sqrt{n^\alpha}} \sim \frac{2n^{\frac{\alpha}{2}}}{2n} = n^{\frac{\alpha}{2}-1}$$

e se $\alpha > 2$ la successione diverge a $+\infty$.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Considerata la funzione $f_\alpha(x) = (\alpha - x)e^x$, l'equazione data equivale a $f_\alpha(x) = 1$. Studiamo quindi la funzione $f_\alpha(x)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Si ha che $f_\alpha(x)$ è definita e derivabile in tutto $\mathbb{R}$. Si ha che

$$\lim_{x\to-\infty} f_\alpha(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = -\infty$$

Inoltre $f'_\alpha(x) = (\alpha-1-x)e^x$ e dunque $f'(x) > 0$ per ogni $x < \alpha-1$, $f'(x) < 0$ per ogni $x > \alpha-1$ e $f'(\alpha-1) = 0$. Ne segue che $f_\alpha(x)$ è strettamente crescente in $(-\infty, \alpha-1)$, è strettamente decrescente in $(\alpha-1, +\infty)$ e che $x = \alpha-1$ è punto di massimo assoluto con $f_\alpha(\alpha-1) = e^{\alpha-1}$. In particolare, si ha che $f_\alpha(x) \leq e^{\alpha-1}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ da cui si deduce immediatamente che l'equazione $f_\alpha(x) = 1$ non ammette soluzioni se $e^{\alpha-1} < 1$ ovvero se $\alpha < 1$.
Da quanto sopra e dal teorema dei valori intermedi segue che l'equazione $f_\alpha(x) = 1$ ammette una sola soluzione se $e^{\alpha-1} = 1$ ovvero se $\alpha = 1$ mentre ammette due soluzioni (la prima in $(-\infty, \alpha-1)$, la seconda in $(\alpha-1, +\infty)$) se $e^{\alpha-1} > 1$ ovvero se $\alpha > 1$.

(3) La risposta esatta è $\boxed{\text{b}}$. É sufficiente osservare che essendo la funzione arcotangente limitata con $-\frac{\pi}{2} < \arctan y < \frac{\pi}{2}$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, risulta

$$-\frac{\pi}{2} < f(x) = \arctan\frac{x}{x-1} < \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$$

Dunque la funzione data è limitata.

In alternativa, si poteva osservare che la funzione data è definita e continua in $I\!R \setminus \{1\}$ con

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{4} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\frac{\pi}{2}$$

Quindi la funzione non ammette asintoti obliqui ma bensì un asintoto orizzontale a $+\infty$, $y = \frac{\pi}{2}$, e un asintoto orizzontale a $-\infty$, $y = -\frac{\pi}{2}$. Riguardo alla monotonia osserviamo che la funzione è derivabile in $I\!R \setminus \{1\}$ con

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2 + x^2} < 0 \quad \text{per ogni} \quad x \in I\!R \setminus \{0\}$$

Ne segue che la funzione risulta strettamente decrescente in $(-\infty, 1)$ e in $(1, +\infty)$. Dai limiti sopra si ottiene allora che $\frac{\pi}{4} > f(x) > -\frac{\pi}{2}$ per $x \in (-\infty, 1)$ mentre $\frac{\pi}{2} > f(x) > \frac{\pi}{4}$ per $x \in (1, +\infty)$. Dunque la funzione è limitata nel suo dominio.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, scrivendo $f(x) = e^{\frac{\log|x|}{x}}$ per $x \neq 0$, ed essendo

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{\log|x|}{x} = \mp\infty$$

si ottiene che $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ mentre $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$. Quindi che la funzione data non è continua in 0.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, operando la sostituzione $t = x^2$ (e quindi $dt = 2xdx$) ed integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\int x^3 e^{x^2} dx &= \frac{1}{2}\int x^2 e^{x^2} 2x dx = \frac{1}{2}\int te^t dt = \frac{1}{2}(te^t - \int e^t dt) \\ &= \frac{1}{2}(te^t - e^t) + c = \frac{1}{2}(x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) + c\end{aligned}$$

Allora

$$\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\left[x^2 e^{x^2} - e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, per $x \to 0$ si ha $1 - \cos x^2 \sim \frac{x^4}{2}$ e dunque che

$$\frac{1 - \cos x^2}{x^\alpha} \sim \frac{1}{2x^{\alpha-4}}$$

Poichè l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-4}}\, dx$ converge se e solo se $\alpha - 4 < 1$ ovvero se e solo se $\alpha < 5$, dal criterio del confronto asintotico si ottiene che l'integrale dato converge se e solo se $\alpha < 5$.

Analisi Matematica 1
seconda prova scritta del 23/03/2005

Domanda filtro Risolvere la disequazione $\sqrt{|e^x - 1|} \le 1$.

1) La successione $a_n = \dfrac{\log(1+e^n) - n}{\sin \frac{1}{n^\alpha}}$

$\boxed{a}$ converge a 0 per ogni $\alpha > 0$

$\boxed{b}$ diverge a $-\infty$ per ogni $0 < \alpha < 1$

$\boxed{c}$ diverge a $+\infty$ per ogni $0 < \alpha < 1$

$\boxed{d}$ nessuna delle precedenti

2) Il limite $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x^2} - \frac{1}{|x|}$

$\boxed{a}$ esiste e vale $-\frac{1}{2}$

$\boxed{b}$ non esiste

$\boxed{c}$ esiste e vale $-\infty$

$\boxed{d}$ nessuna delle precedenti

3) L'equazione $e^{2x} - xe^x = \alpha$

$\boxed{a}$ ammette 2 soluzioni per ogni $0 < \alpha < e$

$\boxed{b}$ ammette una sola soluzione $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{c}$ ammette 2 soluzioni per ogni $\alpha > 1$

$\boxed{d}$ nessuna delle precedenti

4) La funzione $f(x) = \sqrt{|x|} \cdot \sin^2 x$, nel punto 0

$\boxed{a}$ è derivabile con $f'(0) = 1$

$\boxed{b}$ non è derivabile

$\boxed{c}$ è derivabile con $f'(0) = 0$

$\boxed{d}$ nessuna delle precedenti

5) L'integrale $\displaystyle\int_0^1 \log^2 x \, dx$

$\boxed{a}$ converge e vale 1

$\boxed{b}$ non converge

$\boxed{c}$ converge e vale 2

$\boxed{d}$ nessuna delle precedenti

6) L'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x + x^\alpha}} \, dx$

$\boxed{a}$ converge se e solo se $\alpha < 2$

$\boxed{b}$ diverge per ogni $\alpha > 0$

$\boxed{c}$ converge se e solo se $\alpha > 2$

$\boxed{d}$ nessuna delle precedenti

Soluzione

Domanda filtro: $x \leq \log 2$

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Si osservi che, dai limiti notevoli, per $n \to +\infty$ risulta

$$\log(1+e^n) - n = n + \log(\frac{1}{e^n}+1) - n = \log(\frac{1}{e^n}+1) \sim \frac{1}{e^n}$$

mentre, per $\alpha > 0$, si ha

$$\sin\frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^\alpha}.$$

Allora, per ogni $\alpha > 0$, per $n \to +\infty$ si ottiene

$$a_n \sim \frac{\frac{1}{e^n}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \frac{n^\alpha}{e^n}$$

e dunque $a_n \to 0$.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, ricordando che

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \to 0,$$

per $x \to 0^+$ si ottiene

$$\frac{\log(1+x)}{x^2} - \frac{1}{|x|} = \frac{\log(1+x)-x}{x^2} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} \to -\frac{1}{2}$$

mentre per $x \to 0^-$ si ha

$$\frac{\log(1+x)}{x^2} - \frac{1}{|x|} = \frac{\log(1+x)+x}{x^2} = \frac{x + o(x) + x}{x^2} \to -\infty.$$

Quindi il limite dato non esiste.

(3) La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. Posto $f(x) = e^{2x} - xe^x$, l'equazione data è equivalente a $f(x) = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Studiamo quindi la funzione $f(x)$. Si ha innanzitutto che $f(x)$ è definita e continua in tutto $\mathbb{R}$ con

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Osserviamo poi che la funzione è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$ con $f'(x) = e^x(2e^x - x - 1)$. Essendo $e^x \geq x+1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ($y = 1+x$ è retta di supporto in 0 della funzione e^x, convessa in $\mathbb{R}$), si ottiene che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ne segue che $f(x)$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$ e dunque che $f(x)$ è funzione iniettiva.
Dal Teorema dei valori intermedi si deduce che l'equazione data ammette una sola soluzione per $\alpha > 0$ mentre non ammette soluzioni per $\alpha \leq 0$.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti, ricordando che $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$, si ottiene che

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\sqrt{|h|}\sin^2 h}{h} = \lim_{h\to0} h\sqrt{|h|}\frac{\sin^2 h}{h^2} = 0$$

e dunque che $f(x)$ è derivabile in 0 con $f'(0) = 0$.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. L'integrale improprio si può calcolare mediante la definizione

$$\int_0^1 \log^2 x dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \log^2 x dx$$

Osservato che, integrando per parti due volte,

$$\int \log^2 x dx = x \log^2 x - 2 \int \log x dx = x \log^2 x - 2x \log x + 2x + c$$

si ottiene

$$\int_0^1 \log^2 x dx = \lim_{a \to 0^+} [x \log^2 x - 2x \log x + 2x]_a^1 = \lim_{a \to 0^+} 2 - a \log^2 a + 2a \log a - 2a = 2$$

essendo $\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \log x = 0$ per ogni $\alpha > 0$.

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Analizziamo separatamente il comportamento di $f_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{x+x^\alpha}}$ per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Per $x \to 0^+$ si ha

$$f_\alpha(x) \sim \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } \alpha > 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2x}} & \text{se } \alpha = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^\alpha}} & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Dal criterio del confronto asintotico otteniamo allora che se $\alpha \geq 1$, $\int_0^1 f_\alpha(x)dx$ converge. Se $\alpha < 1$, essendo $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^\alpha}}$ convergente, sempre dal criterio del confronto asintotico, deduciamo che $\int_0^1 f_\alpha(x)dx$ converge. Da quanto sopra si ottiene che $\int_0^1 f_\alpha(x)dx$ converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Per $x \to +\infty$ si ha

$$f_\alpha(x) \sim \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } \alpha < 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2x}} & \text{se } \alpha = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^\alpha}} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Dal criterio del confronto asintotico otteniamo allora che se $\alpha \leq 1$, $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)dx$ diverge. Inoltre osservato che $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^\alpha}}$ converge se e solo se $\alpha > 2$, ne deduciamo che $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)dx$ converge se e solo se $\alpha > 2$.

Riunendo i risultati sopra, otteniamo che l'integrale dato converge se e solo se $\alpha > 2$.

Analisi Matematica 1
seconda prova scritta del 11/04/2005

Domanda filtro Risolvere la disequazione $\arctan\left(\frac{1}{1-x^2}\right) > \pi/4$.

1) La successione $a_n = \dfrac{n^\alpha}{\sqrt{n^4+n^3-n^2}}$,

a) converge a 0 se $\alpha > 1$

b) converge a $\frac{1}{2}$ se $\alpha = 1$

c) diverge a $+\infty$ se $\alpha < 1$

d) nessuna delle precedenti

2) L'equazione $\arctan x - \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \alpha$ ammette due soluzioni

a) per nessun $\alpha \in I\!R$

b) per ogni $|\alpha| > 1$

c) per ogni $|\alpha| < \frac{\pi}{2} - 1$

d) nessuna delle precedenti

3) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{\log(1+|x|)} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ nel punto $x = 0$

a) non è continua

b) è derivabile

c) è continua ma non è derivabile

d) nessuna delle precedenti

4) Sia $F(x)$ la primitiva della funzione $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2x+2}$ tale che $F(-1) = 0$.
Il limite $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$

a) non esiste

b) è infinito

c) è finito

d) nessuna delle precedenti

5) La funzione $f(x) = xe^{1/x} - x - 1$ per $x \to -\infty$

a) non è un infinitesimo

b) è un infinitesimo di ordine 2

c) è un infinitesimo di ordine 1

d) nessuna delle precedenti

6) L'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+\sqrt{x}-x}\,dx$ vale

a) $\sqrt{2} - 1$

b) $\log\sqrt[3]{4}$

c) $\pi/2$

d) nessuna delle precedenti

Soluzione

Domanda filtro: $-1 < x < 1$, $x \neq 0$

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Si osservi che, dai limiti notevoli, per $n \to +\infty$ risulta

$$a_n = \frac{n^\alpha}{\sqrt{n^4 + n^3} - n^2} = \frac{n^{\alpha-2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1} \sim \frac{n^{\alpha-2}}{\frac{1}{2n}} = 2n^{\alpha-1}$$

e quindi

$$a_n \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 1 \\ 2 & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Posto $f(x) = \arctan x - \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$, l'equazione data è equivalente a $f(x) = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Studiamo quindi la funzione $f(x)$. Si ha innanzitutto che $f(x)$ è definita e continua in tutto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ con

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} - \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{x} = -\frac{\pi}{2} + 1,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} - \lim_{x \to +\infty} \frac{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{x} = \frac{\pi}{2} - 1$$

mentre $\lim\limits_{x \to 0^\pm} f(x) = \mp\infty$ Osserviamo poi che la funzione è derivabile in ogni $x \neq 0$ con

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{1+x^2}}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

Essendo somma di termini positivi, si ottiene che $f'(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$. Ne segue che $f(x)$ è strettamente crescente in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
(Si noti che lo studio sopra si poteva semplificare osservando che $f(x)$ è funzione dispari).
Dal Teorema dei valori intermedi si deduce che l'equazione data ammette soluzione in $(-\infty, 0)$ se e solo se $\alpha > -\frac{\pi}{2} + 1$ e tale soluzione è unica. Analogalmente, l'equazione ammette soluzione in $(0, +\infty)$ se e solo se $\alpha < \frac{\pi}{2} - 1$ e tale soluzione è unica. Ne concludiamo che l'equazione ammette due soluzioni se e solo se $-\frac{\pi}{2} + 1 < \alpha < \frac{\pi}{2} - 1$ ovvero $|\alpha| < \frac{\pi}{2} - 1$.

(3) La risposta esatta è $\boxed{\text{a}}$. Infatti, ricordando che per $y \to 0$, $\log(1+y) \sim y$ mentre $\sin y \sim y$, si ottiene

$$\lim_{x \to 0^\pm} \frac{\sin(2x)}{\log(1+|x|)} = \lim_{x \to 0^\pm} \frac{2x}{|x|} = \pm 2$$

Quindi la funzione data non risulta continua in 0.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, per definizione risulta

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} \int_{-1}^{x} f(t)dt = \int_{-1}^{-\infty} f(t)dt.$$

Essendo $f(x)$ infinitesimo di ordine 1 per $x \to -\infty$, dal criterio del confronto asintotico si deduce che l'integrale improprio diverge ovvero che il limite dato è infinito.
In alternativa si poteva calcolare direttamente la primitiva, utilizzando il metodo di integrazione delle funzioni razionali, ottenendo

$$F(x) = \frac{1}{2}\log(x^2 + 2x + 2) - \arctan(x + 1)$$

e quindi $\lim_{x\to-\infty} F(x) = +\infty$.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Ricordando che $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ per $y \to 0$, per $x \to -\infty$ si ottiene

$$f(x) = x(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})) - x - 1 = \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})$$

e quindi che $f(x)$ è infinitesimo di ordine 1.

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Operando la sostituzione $t = \sqrt{x}$, da cui $x = t^2$ e $dx = 2tdt$, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{2 + \sqrt{x} - x}dx &= -2\int_0^1 \frac{t}{t^2 - t - 2}dt = -\frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{t+1} + \frac{2}{t-2}dt \\ &= -\frac{2}{3}\left[\log|t + 1| + 2\log|t - 2|\right]_0^1 = \frac{2}{3}\log 2 = \log\sqrt[3]{4}\end{aligned}$$

Analisi Matematica 1

seconda prova scritta del 29/06/2005

Domanda filtro Risolvere la disequazione $\dfrac{|x|}{1-x} > 1.$

1) La successione $a_n = \dfrac{(2n)!}{2^{n^2}}$,

$\boxed{\text{a}}$ converge a 0

$\boxed{\text{b}}$ diverge a $+\infty$

$\boxed{\text{c}}$ converge a 1

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

2) L'equazione $e^{1/x} = \alpha\sqrt{x+1}$ ammette

$\boxed{\text{a}}$ una sola soluzione per ogni $\alpha > 0$

$\boxed{\text{b}}$ due soluzioni se e solo se $\alpha \geq 1/e$

$\boxed{\text{c}}$ due soluzioni per ogni $\alpha > 0$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

3) La funzione $f(x) = \log(\cos x) - \sin(\sqrt{1+x^2} - 1)$, per $x \to 0$ è un infinitesimo

$\boxed{\text{a}}$ di ordine 1

$\boxed{\text{b}}$ di ordine superiore a 2

$\boxed{\text{c}}$ di ordine 2

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

4) La funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - 2\arcsin(1-x)}{x^\alpha} & \text{se } x \in (0,1] \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$, risulta continua nel punto $x = 0$ se e solo se

$\boxed{\text{a}}$ $\alpha < \frac{1}{2}$

$\boxed{\text{b}}$ $\alpha \leq 0$

$\boxed{\text{c}}$ $\alpha < 1$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

5) La funzione $f(x) = \displaystyle\int_0^x t^2 e^{-t^2}\, dt$

$\boxed{\text{a}}$ è pari

$\boxed{\text{b}}$ è convessa

$\boxed{\text{c}}$ ammette massimo e minimo

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

6) L'integrale $\displaystyle\int_0^1 x^2 \log^2 x\, dx$

$\boxed{\text{a}}$ diverge

$\boxed{\text{b}}$ converge e vale $\frac{2}{9}$

$\boxed{\text{c}}$ converge e vale $\frac{4}{9}$

$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Soluzione

Domanda filtro: $\frac{1}{2} < x < 1$

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti per $n \to +\infty$ si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{2^{2n+1}} \sim \frac{4n^2}{2^{2n}} \to 0$$

e dal criterio del rapporto si conclude che $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Posto $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{x+1}}$ ed osservato che $x = -1$ non è soluzione dell'equazione per alcun $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha che l'equazione data è equivalente a $f(x) = \alpha$. Studiamo quindi la funzione $f(x)$. Si ha innanzitutto che $f(x)$ è definita e continua in $D = (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ con

$$\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

mentre

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Osserviamo poi che la funzione è derivabile in ogni $x \in D$ con

$$f'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}(x^2 + 2x + 2)}{x+1} < 0 \quad \forall x \in D$$

Ne segue che $f(x)$ è strettamente decrescente in $(-1, 0)$ e in $(0, +\infty)$.
Dal Teorema dei valori intermedi si deduce che l'equazione data ammette soluzione in $(-1, 0)$ se e solo se $\alpha > 0$ e tale soluzione è unica. Analogalmente, l'equazione ammette soluzione in $(0, +\infty)$ se e solo se $\alpha > 0$ e tale soluzione è unica. Ne concludiamo che l'equazione ammette due soluzioni per ogni $\alpha > 0$.

(3) La risposta esatta è $\boxed{\text{c}}$. Infatti, ricordando che per $y \to 0$, $\log(1 + y) = y + o(y)$, per $x \to 0$ si ha $\log(\cos x) = \log(1 + (\cos x - 1)) = \cos x - 1 + o(\cos x - 1)$. Essendo inoltre $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, si ottiene $\log(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$.
D'altra parte, ricordando che per $y \to 0$, $\sin y = y + o(y)$, per $x \to 0$ si ha $\sin(\sqrt{1+x^2} - 1) = \sqrt{1+x^2} - 1 + o(\sqrt{1+x^2} - 1)$ ed essendo $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, risulta $\sin(\sqrt{1+x^2} - 1) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.
Quindi $f(x) = -x^2 + o(x^2)$ e $ord(f(x)) = 2$.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Occorre determinare per quali valori di α risulta

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\pi - 2 \arcsin(1 - x)}{x^\alpha} = 0.$$

Il limite è banalmente verificato nel caso in cui $\alpha \leq 0$ mentre per $\alpha > 0$ è applicabile il Teorema di de L'Hopital e si ottiene

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\pi - 2 \arcsin(1 - x)}{x^\alpha} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-(1-x)^2}}}{\alpha x^{\alpha - 1}} = \frac{2}{\alpha} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^{\alpha-1}\sqrt{2x - x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^{\alpha - \frac{1}{2}}}$$

e tale limite risulta nullo se e solo se $\alpha < \frac{1}{2}$.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. $\boxed{\text{a}}$ è falsa, infatti essendo la funzione integranda pari, la funzione integrale risulta dispari: operando la sostituzione $t = -s$ si ottiene

$$f(-x) = \int_0^{-x} t^2 e^{-t^2} dt = -\int_0^x s^2 e^{-s^2} ds = -f(x).$$

$\boxed{\text{c}}$ è falsa, infatti per il teorema fondamentale del calcolo integrale, $f(x)$ è derivabile con $f'(x) = x^2 e^{-x^2} \geq 0$ per ogni x. Dunque $f(x)$ risulta sempre crescente. Anche $\boxed{\text{b}}$ è falsa in quanto $f''(x) = 2xe^{-x^2}(1 - x^2) > 0$ se e solo se $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$. Quindi $f(x)$ risulta convessa in $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ e concava in $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\int x^2 \log^2 x dx &= \frac{1}{3}x^3 \log^2 x - \frac{2}{3}\int x^2 \log x dx = \frac{1}{3}x^3 \log^2 x - \frac{2}{9}x^3 \log x + \frac{2}{9}\int x^2 dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \log^2 x - \frac{2}{9}x^3 \log x + \frac{2}{27}x^3 + c\end{aligned}$$

e ricordando il limite notevole $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \log x = 0$ per ogni $\alpha > 0$, si conclude che

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 \log^2 x dx &= \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 x^2 \log^2 x dx = \lim_{a\to 0^+} \left[\frac{1}{3}x^3 \log^2 x - \frac{2}{9}x^3 \log x + \frac{2}{27}x^3\right]_a^1 \\ &= \lim_{a\to 0^+} \frac{2}{27} - \frac{1}{3}a^3 \log^2 a + \frac{2}{9}a^3 \log a - \frac{2}{27}a^3 = \frac{2}{27}\end{aligned}$$

Analisi Matematica 1
seconda prova scritta del 13/07/2005

Domanda filtro Risolvere la disequazione $\sqrt{1-\log(1-x)} < \log x$.

1) La successione $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} - e^n$,

$\boxed{\text{a}}$ converge a 0
$\boxed{\text{b}}$ converge a e
$\boxed{\text{c}}$ diverge a $+\infty$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

2) L'equazione $x(|x|+\alpha)+1=0$ ammette due soluzioni

$\boxed{\text{a}}$ per $\alpha > 0$
$\boxed{\text{b}}$ per $\alpha \leq -2$
$\boxed{\text{c}}$ per $\alpha < 1$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

3) La funzione $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}$

$\boxed{\text{a}}$ è iniettiva
$\boxed{\text{b}}$ ha codominio $(-\infty, \frac{1}{2}]$
$\boxed{\text{c}}$ è limitata
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

4) La funzione $f(x) = \cos(\sin x) - \sqrt{1-x^2}$ per $x \to 0$ è un infinitesimo di ordine

$\boxed{\text{a}}$ 1
$\boxed{\text{b}}$ maggiore di 2
$\boxed{\text{c}}$ 2
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

5) L'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\alpha[\arcsin(1-\frac{1}{x}) - \pi/2]\ dx$

$\boxed{\text{a}}$ converge per ogni $\alpha < 1$
$\boxed{\text{b}}$ non converge per alcun $\alpha > 0$
$\boxed{\text{c}}$ converge per ogni $\alpha > 2$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

6) L'integrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x\ dx$ vale

$\boxed{\text{a}}$ $\frac{1}{2}(1-\log 2)$
$\boxed{\text{b}}$ $\frac{1}{2}(\log\sqrt{2}-1)$
$\boxed{\text{c}}$ $\frac{1}{2}(1-\log\sqrt{2})$
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Soluzione

Domanda filtro: nessuna soluzione

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Osservato che

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} - e^n = e^{n^2\log(1+\frac{1}{n})} - e^n = e^n(e^{n^2\log(1+\frac{1}{n})-n} - 1),$$

iniziamo a determinare il comportamento della successione $n^2\log(1+\frac{1}{n}) - n$. A tale scopo, ricordando che $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$, posto $x = \frac{1}{n}$, per $n \to +\infty$ si ottiene

$$n^2\log(1+\frac{1}{n}) - n = n^2(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})) - n = -\frac{1}{2} + o(1).$$

Ne segue che $n^2\log(1+\frac{1}{n}) - n \to -\frac{1}{2}$ e dunque che $e^{n^2\log(1+\frac{1}{n})-n} \to e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Essendo $e^n \to +\infty$ e $\frac{1}{\sqrt{e}} < 1$, ne concludiamo che $a_n \to -\infty$.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Per $x \geq 0$, l'equazione si riduce all'equazione di secondo grado $x^2 + \alpha x + 1 = 0$. Tale equazione ammette soluzione se e solo se $\Delta = \alpha^2 - 4 \geq 0$ ovvero se e solo se $|\alpha| \geq 2$. In tal caso le soluzioni sono date da

$$x_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\Delta}}{2}$$

Se $\alpha \geq 2$ allora sia x_1 che x_2 risultano negative e quindi non accettabili. Se invece $\alpha \leq -2$ entrambe le soluzioni risultano positive e dunque accettabili. Tali soluzioni sono distinte se $\alpha < -2$, coincidenti se $\alpha = -2$.
Analogalmente, per $x < 0$, l'equazione si riduce all'equazione di secondo grado $-x^2 + \alpha x + 1 = 0$. In questo caso $\Delta = \alpha^2 + 4 > 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e quindi l'equazione ammette sempre le due soluzioni distinte

$$x_1 = \frac{\alpha - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{\alpha + \sqrt{\Delta}}{2}$$

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, la soluzione x_1 risulta negativa, e quindi accettabile, mentre x_2 risulta positiva e quindi non accettabile.
Riunendo quanto sopra si ottiene che l'equazione data ammette tre soluzioni se $\alpha < -2$, due soluzioni se $\alpha = -2$ ed una sola soluzione per tutti gli altri valori di α.

In alternativa, si poteva studiare la funzione $f_\alpha(x) = x(|x| + \alpha) + 1$ determinandone il numero degli zeri al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ oppure, osservato che l'equazione data è equivalente all'equazione $|x| + \alpha + \frac{1}{x} = 0$, si poteva studiare la funzione $g_\alpha(x) = |x| + \frac{1}{x}$.

(3) La risposta esatta è $\boxed{\text{d}}$. La funzione risulta definita in tutto $\mathbb{R}$ con $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Quindi $f(x)$ non è limitata.

La funzione risulta derivabile in $\mathbb{R}$ con $f'(x) = e^{-x}(2e^{-x} - 1)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi $f'(x) > 0$ se e solo se $x < \log 2$ e dunque $f(x)$ risulta strettamente crescente in $(-\infty, \log 2)$, strettamente decrescente in $(\log 2, +\infty)$ e $x_0 = \log 2$ risulta un punto di massimo assoluto con $f(\log 2) = \frac{1}{4}$.
Ne segue che $f(x)$ non è iniettiva e che ha codominio $(-\infty, \frac{1}{4}]$.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Dagli sviluppi notevoli per $x \to 0$, abbiamo

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x + o(\sin^2 x) - (1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) \\ &= -\frac{1}{2}(x + o(x))^2 + o((x + o(x))^2) + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\ &= -xo(x) + o(x^2) = o(x^2) \end{aligned}$$

e quindi che $f(x)$ ha ordine di infinitesimo maggiore di 2.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, osservato che $\frac{\pi}{2} - \arcsin(1 - y) \sim \sqrt{2y}$ per $y \to 0^+$ (si veda risoluzione prova del 29/06/05), per $x \to +\infty$ risulta

$$x^\alpha(\frac{\pi}{2} - \arcsin(1 - \frac{1}{x})) \sim \frac{\sqrt{2}}{x^{\frac{1}{2}-\alpha}}$$

Ne segue che l'integrale dato converge se e solo se $\frac{1}{2} - \alpha > 1$ ovvero se e solo se $\alpha < -\frac{1}{2}$.
In particolare l'integrale non converge per alcun $\alpha > 0$.

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Ricordando che $D(\tan x) = 1 + \tan^2 x$, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x(\tan^2 x + 1)\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\tan^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + [\log|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} + \log\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}(1 - \log 2) \end{aligned}$$

In alternativa, operando la sostituzione $t = \tan x$ (e quindi $dx = \frac{dt}{1+t^2}$), si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x\, dx &= \int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2}dt = \int_0^1 tdt - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt \\ &= \frac{1}{2}(\left[t^2\right]_0^1 - \left[\log(1+t^2)\right]_0^1) = \frac{1}{2}(1 - \log 2) \end{aligned}$$

Analisi Matematica 1
seconda prova scritta del 08/09/2005

Domanda filtro. Risolvere la disequazione $\sqrt{x-1} < \dfrac{x}{2}$.

1) La successione $a_n = \left(1+\sin\dfrac{1}{n}\right)^{1-\cos(n^\alpha)}$ con $\alpha > 0$,

- [a] è indeterminata per ogni $\alpha > 0$
- [b] converge se e solo se $\alpha < 1$
- [c] converge ad 1 per ogni $\alpha > 0$
- [d] nessuna delle precedenti

2) La funzione $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$, nel punto $x = 0$

- [a] è derivabile per ogni $\alpha > 0$
- [b] non è continua per alcun $\alpha > 0$
- [c] è continua ma non derivabile per ogni $\alpha > 1$
- [d] nessuna delle precedenti

3) La funzione $f(x) = \tan x - (\arctan x)(\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1)$ per $x \to 0$ è un infinitesimo di ordine

- [a] $\frac{3}{2}$
- [b] maggiore di 2
- [c] 1
- [d] nessuna delle precedenti

4) L'equazione $\arctan e^x = x$ ammette

- [a] una sola soluzione positiva
- [b] due soluzioni discordi
- [c] una sola soluzione negativa
- [d] nessuna delle precedenti

5) L'integrale $\displaystyle\int_1^{e^{2\pi}} \frac{\sin(\log x)}{x} \log x \, dx$ vale

- [a] 0
- [b] 2π
- [c] 1
- [d] -2π

6) L'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\log^2 x}{(x-1)^\alpha} \, dx$

- [a] converge per $1 < \alpha < 2$
- [b] converge per $\frac{3}{2} < \alpha < 3$
- [c] converge per $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$
- [d] nessuna delle precedenti

Domanda filtro: $x \geq 1$, $x \neq 2$

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{c}}$. Infatti si osservi innanzitutto che

$$a_n = \left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)^{1-\cos(n^\alpha)} = e^{(1-\cos(n^\alpha))\log(1+\sin\frac{1}{n})}$$

e che la successione $\log(1+\sin\frac{1}{n})$ è infinitesima per $n \to +\infty$ mentre la successione $1-\cos(n^\alpha)$ è limitata per ogni $\alpha > 0$. Allora, per $n \to +\infty$, si ottiene $(1-\cos(n^\alpha))\log(1+\sin\frac{1}{n}) \to 0$ e quindi $a_n \to 1$ per ogni $\alpha > 0$.

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Infatti, si ha che

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^\alpha \sin\frac{1}{x} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > 0$$

mentre

$$\text{esiste finito il limite } \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > 1$$

Ne segue che la funzione data è continua in $x = 0$ se e solo se $\alpha > 0$ mentre è derivabile in $x = 0$ se e solo se $\alpha > 1$.

(3) La risposta esatta è $\boxed{\text{c}}$. Infatti, dai limiti notevoli per $x \to 0$ si ottiene

$$f(x) = x + o(x) - (x + o(x))(\frac{1}{2}\sqrt{x} + o(\sqrt{x})) = x + o(x) - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} + o(x^{\frac{3}{2}}) = x + o(x),$$

essendo $x^{\frac{3}{2}} = o(x)$. Ne segue che $ord(f(x)) = 1$ per $x \to 0$.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Consideriamo la funzione $f(x) = \arctan e^x - x$ e cerchiamone gli zeri. Tale funzione risulta definita e derivabile in tutto $I\!R$ e poichè $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$, dal Teorema di esistenza degli zeri possiamo affermare che la funzione ammette almeno uno zero. Essendo poi

$$f'(x) = \frac{1}{1+e^{2x}} - 1 = -\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} < 0 \quad \forall x \in I\!R$$

otteniamo che la funzione è strettamente decrescente in $I\!R$ e dunque che ammette uno ed un solo zero. Essendo infine $f(0) = \frac{\pi}{4} > 0$, possiamo concludere che tale zero è positivo.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Infatti, operando la sostituzione $t = \log x$ (e quindi $dt = \frac{dx}{x}$) ed integrando per parti si ottiene

$$\int_1^{e^{2\pi}} \frac{\sin(\log x)}{x}\log x\,dx = \int_0^{2\pi} t\sin t\,dt = [-t\cos t]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\cos t\,dt$$
$$= [-t\cos t + \sin t]_0^{2\pi} = -2\pi$$

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti, per $x \to 1$ risulta $\log x = \log(1+(x-1)) \sim (x-1)$ e quindi

$$\frac{\sqrt{x}\log^2 x}{(x-1)^\alpha} \sim \frac{(x-1)^2}{(x-1)^\alpha} = \frac{1}{(x-1)^{\alpha-2}}$$

Dal criterio del confronto asintotico segue allora che l'integrale $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{x}\log^2 x}{(x-1)^\alpha}dx$ converge se e solo se $\alpha - 2 < 1$ ovvero $\alpha < 3$.
Per $x \to +\infty$, osserviamo innanzitutto che per ogni $x > e$ si ha

$$\frac{\sqrt{x}\log^2 x}{(x-1)^\alpha} > \frac{\sqrt{x}}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-\frac{1}{2}}}$$

e quindi, dal criterio del confronto si ottiene che $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\log^2 x}{(x-1)^\alpha}dx$ diverge se $\alpha - \frac{1}{2} \leq 1$ ovvero se $\alpha \leq \frac{3}{2}$. Se $\alpha > \frac{3}{2}$, ricordando che $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\beta} = 0$ se $\beta > 0$, per ogni $\lambda < \alpha - \frac{1}{2}$ si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}\log^2 x}{(x-1)^\alpha}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log^2 x}{x^{\alpha-\lambda-\frac{1}{2}}} = 0.$$

Scelto allora $\lambda \in (1, \alpha - \frac{1}{2})$, possibile essendo $\alpha - \frac{1}{2} > 1$, il criterio del confronto asintotico ci permette di concludere che l'integrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\log^2 x}{(x-1)^\alpha}dx$ converge.
Riunendo quanto ottenuto, si ha che

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\log^2 x}{(x-1)^\alpha}dx = \int_1^e \frac{\sqrt{x}\log^2 x}{(x-1)^\alpha}dx + \int_e^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\log^2 x}{(x-1)^\alpha}dx$$

converge se e solo se $\frac{3}{2} < \alpha < 3$.

Analisi Matematica 1
Seconda prova scritta del 05/10/2005

Domanda filtro. Risolvere la disequazione $\sqrt{|x|-1} > x$.

1) La successione $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}}{n+n^\alpha}$ con $\alpha \in I\!R$

$\boxed{a}$ diverge per ogni $\alpha > 0$
$\boxed{b}$ converge a 0 per ogni $\alpha \in I\!R$
$\boxed{c}$ converge ad 1 per $\alpha = 1$
$\boxed{d}$ nessuna delle precedenti

2) La funzione $f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ con $\alpha \geq 0$ nel punto $x = 0$

$\boxed{a}$ è derivabile per ogni $\alpha > 0$
$\boxed{b}$ non è continua per alcun $\alpha \geq 0$
$\boxed{c}$ è continua ma non derivabile per ogni $\alpha \geq 0$
$\boxed{d}$ nessuna delle precedenti

3) La funzione $f(x) = \arcsin(1-x) - \arctan\frac{1}{x}$ per $x \to 0^+$ è un infinitesimo di ordine

$\boxed{a}$ 1
$\boxed{b}$ maggiore di 1
$\boxed{c}$ minore di 1
$\boxed{d}$ nessuna delle precedenti

4) L'equazione $x^\alpha |\log x| = 1$ con $\alpha > 0$ ammette

$\boxed{a}$ una sola soluzione per ogni $\alpha > 0$
$\boxed{b}$ tre soluzioni per ogni $\alpha \geq e$
$\boxed{c}$ due soluzioni per ogni $\alpha > 1$
$\boxed{d}$ nessuna delle precedenti

5) L'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \arctan\frac{1}{x}\, dx$ vale

$\boxed{a}$ $\frac{\pi}{4}$
$\boxed{b}$ $\frac{\pi}{4} - \log 2$
$\boxed{c}$ π
$\boxed{d}$ nessuna delle precedenti

6) L'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\left(\frac{\sin x}{x} - 1\right) dx$ converge

$\boxed{a}$ per $\alpha < 3$
$\boxed{b}$ per $\alpha \leq 3$
$\boxed{c}$ per $2 < \alpha$
$\boxed{d}$ nessuna delle precedenti

Soluzione

Domanda filtro: $x \leq -1$

(1) La risposta esatta è la $\boxed{\text{b}}$. Infatti si osservi che per $n \to +\infty$ risulta

$$\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n} = \frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}} = \frac{2n}{n(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}})} \to 1$$

e dunque che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+n^\alpha}$$

Per $n \to +\infty$, se $\alpha > 1$ si ha

$$\frac{1}{n+n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha(\frac{1}{n^{\alpha-1}+1})} \to 0,$$

se $\alpha = 1$ allora

$$\frac{1}{n+n^\alpha} = \frac{1}{2n} \to 0$$

ed infine, se $\alpha < 1$ abbiamo

$$\frac{1}{n+n^\alpha} = \frac{1}{n(1+\frac{1}{n^{1-\alpha}})} \to 0$$

(2) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, si ha che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_\alpha(x)}{x} = \lim_{x\to 0} x^{\alpha-1}\sin x = \lim_{x\to 0} x^\alpha \frac{\sin x}{x} = 0$$

per ogni $\alpha > 0$.

(3) La risposta esatta è $\boxed{\text{c}}$. Infatti, dal teorema di De l'Hopital, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin(1-x)}{x^b} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}}{bx^{b-1}} = \frac{1}{b}\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{b-1}\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}b}\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{b-\frac{1}{2}}}$$

e tale limite risulta finito e non nullo se e solo se $\alpha = \frac{1}{2}$. Quindi otteniamo che per $x \to 0^+$ si ha

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin(1-x) \sim \sqrt{2x}$$

ovvero $\arcsin(1-x) = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2x} + o(\sqrt{x})$. Essendo poi $\arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ per ogni $x > 0$, per $x \to 0^+$ otteniamo che $\arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - x + o(x)$. Allora

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2x} + o(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2} + x + o(x) = -\sqrt{2x} + o(\sqrt{x})$$

essendo $x = o(\sqrt{x})$. Ne segue che $ord(f(x)) = \frac{1}{2}$ per $x \to 0$.

(4) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Consideriamo la funzione $f(x) = x^\alpha |\log x|$ ed osserviamo che l'equazione data è equivalente all'equazione $f(x) = 1$.
$f(x)$ risulta definita e continua in $(0, +\infty)$ e derivabile in $(0, 1) \cup (1, +\infty)$. Risulta $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Inoltre si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} \log x + x^{\alpha-1} = x^{\alpha-1}(\alpha \log x + 1) & \text{se } x > 1 \\ -\alpha x^{\alpha-1} \log x - x^{\alpha-1} = -x^{\alpha-1}(\alpha \log x + 1) & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Otteniamo allora che $f'(x) > 0$ per ogni $x > 1$ e dunque che la funzione è strettamente crescente in $(1, +\infty)$. Essendo $f(1) = 0$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, dal Teorema dei valori intermedi otteniamo che l'equazione $f(x) = 1$ ammette una ed una sola soluzione in $(1, +\infty)$.
Inoltre, per $0 < x < 1$, $f'(x) > 0$ se e solo se $\log x < -\frac{1}{\alpha}$ ovvero se e solo se $x < e^{-\frac{1}{\alpha}}$.
Ne segue che $f(x)$ è strettamente crescente in $(0, e^{-\frac{1}{\alpha}})$ e strettamente decrescente in $(e^{-\frac{1}{\alpha}}, 1)$. Quindi $x = e^{-\frac{1}{\alpha}}$ è punto di massimo relativo con $f(e^{-\frac{1}{\alpha}}) = \frac{1}{\alpha e}$ mentre $x = 1$ è punto di minimo assoluto con $f(1) = 0$.
Otteniamo allora che l'equazione $f(x) = 1$ non ammette soluzioni in $(0, 1)$ se $\frac{1}{\alpha e} < 1$ ovvero se $\alpha > \frac{1}{e}$; ammette una sola soluzione se $\alpha = \frac{1}{e}$ e due soluzioni se $\alpha < \frac{1}{e}$.
Riunendo i risultati ottenuti si ha che l'equazione data ammette :
- tre soluzioni se $\alpha < \frac{1}{e}$;
- due soluzioni se $\alpha = \frac{1}{e}$;
- una soluzione se $\alpha > \frac{1}{e}$.

(5) La risposta esatta è la $\boxed{\text{d}}$. Infatti, operando la sostituzione $t = \frac{1}{x}$ (e quindi $dt = -\frac{dx}{x^2}$) ed integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2} \arctan \frac{1}{x}\, dx &= -\int \arctan t\, dt = -t \arctan t + \int \frac{t}{1+t^2}\, dt \\ &= -t \arctan t + \frac{1}{2} \log(1+t^2) + c \\ &= -\frac{1}{x} \arctan \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \log(1 + \frac{1}{x^2}) + c \end{aligned}$$

e quindi

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \arctan \frac{1}{x}\, dx = \lim_{b \to +\infty} -\frac{1}{b} \arctan \frac{1}{b} + \frac{1}{2} \log(1 + \frac{1}{b^2}) + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2.$$

(6) La risposta esatta è la $\boxed{\text{a}}$. Infatti, per $x \to 0$ risulta $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ e quindi

$$\frac{\sin x}{x} - 1 = \frac{\sin x - x}{x} = \frac{1}{x}(-\frac{x^3}{6} + o(x^3)) = -\frac{x^2}{6} + o(x^2) \sim -\frac{x^2}{6}$$

Otteniamo allora che

$$\frac{1}{x^\alpha}\left(\frac{\sin x}{x} - 1\right) \sim -\frac{1}{6x^{\alpha-2}}$$

e quindi, dal criterio del confronto asintotico, l'integrale dato converge se e solo se $\alpha < 3$.