**Corsi di Laurea in Ingegneria Edile e Architettura**
**Prova scritta (A) di Analisi Matematica 1 del 27/02/2010**

COGNOME ______________________ NOME ______________________

MATRICOLA ______________________

**1)** Mostrare che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x+\sqrt{1+x^2})-\sin(x)}{(2^{x^2}-1)\sin(\mathrm{e}^{x^2}-1)} = 0.$$

*Possibile soluzione:* Considerando dapprima il denominatore notiamo che essendo $2^{x^2}-1 = e^{x^2\log(2)} - 1 \sim_{x\to 0} x^2\log(2)$ e che $\sin(e^{x^2}-1) \sim_{x\to 0} e^{x^2}-1 \sim_{x\to 0} x^2$, otteniamo $(2^{x^2}-1)\sin(e^{x^2}-1) \sim_{x\to 0} x^4\log(2)$. Si ha allora

$$\begin{aligned}
\frac{\log(x+\sqrt{1+x^2})-\sin(x)}{(2^{x^2}-1)\sin(\mathrm{e}^{x^2}-1)} &\sim_{x\to 0^+} \frac{\log(x+\sqrt{1+x^2})-\sin(x)}{x^4\log(2)}\\
&\sim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2}\log(1+x^2)+\log(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})-\sin(x)}{x^4\log(2)}.
\end{aligned}$$

Dato che il denominatore di tale ultima forma è un infinitesimo di ordine 4 determiniamo lo sviluppo del suo numeratore a meno di $o(x^4)$. Utilizzando gli sviluppi notevoli e ricordando in particolare che per $y \to 0^+$ si ha

$$\begin{aligned}
(1+y)^{-\frac{1}{2}} &= 1-\frac{1}{2}y+\frac{3}{8}y^2+\ldots+\binom{-\frac{1}{2}}{n}y^n+o(y^n),\\
\log(1+y) &= y-\frac{y^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{y^n}{n}+o(y^n),\\
\sin(y) &= y-\frac{y^3}{3!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{y^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(y^{2n})
\end{aligned}$$

otteniamo che per $x \to 0^+$ si ha

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\log(1+x^2) &= \frac{1}{2}x^2-\frac{x^4}{4}+o(x^4),\\
\log(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}) &= \log(1+x(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+o(x^4))) = \log(1+x-\frac{1}{2}x^3+o(x^4)) =\\
&= x-\frac{1}{2}x^3+o(x^4)-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}x^3+o(x^4))^2+\frac{1}{3}(x+o(x^2))^3-\frac{1}{4}(x+o(x^2))^4 =\\
&= x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^4+o(x^4)
\end{aligned}$$

da cui il numeratore dell'espressione in esame

$$\frac{1}{2}\log(1+x^2)+\log(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})-\sin(x) = \frac{1}{2}x^2-\frac{x^4}{4}+x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^4+x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4) = o(x^4).$$

Concludiamo come si voleva

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x+\sqrt{1+x^2})-\sin(x)}{(2^{x^2}-1)\sin(\mathrm{e}^{x^2}-1)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{o(x^4)}{x^4\log(2)} = 0.$$

**2)** Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$\log(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{\sqrt{|1+x|}}.$$

*Possibile soluzione:* Notiamo che l'equazione risulta definita su

$$\mathcal{D} = \{x \in I\!R \setminus \{0\} \;/\; |1+x| > 0 \text{ e } 1+\frac{1}{x} > 0\} = \{x \in I\!R \setminus \{-1,0\} \;/\; \frac{x+1}{x} > 0\} = (-\infty,-1) \cup (0,+\infty).$$

Determinare il numero di soluzioni in $\mathcal{D}$ dell'equazione proposta equivale a determinare il numero di zeri su $\mathcal{D}$ della funzione $f(x) = \log(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{\sqrt{|1+x|}}$. Osserviamo che per $x < -1$ si ha $\log(1+1/x) < 0$ (essendo $0 < 1+1/x < 1$) così come $-1/\sqrt{|1+x|} < 0$, da cui $f(x) = \log(1+1/x) - 1/\sqrt{|1+x|} < 0$ per ogni $x < -1$. Concludiamo che l'equazione data non ha soluzioni $x < -1$ e possiamo limitare lo studio per la determinazione del numero degli zeri di $f$ al dominio $I\!R^+ = \{x \in I\!R \,/\, x > 0\}$.
Notiamo che la funzione $f$ risulta continua e derivabile su $I\!R^+$ risultando che per $x \in I\!R^+$ si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{\sqrt{1+x}}, \\ f'(x) &= \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x}} = \frac{1}{(x+1)}(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}}) \end{aligned}$$

È immediato riconoscere che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \log(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{\sqrt{1+x}} = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \log(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 0.$$

Inoltre per $x > 0$ si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Tale ultima disequazione è equivalente su $I\!R^+$ alla disequazione $1 + x - 2x^2 < 0$ che è verificata su $I\!R^+$ solo se $x > 1$. Deduciamo che $f$ presenta un punto di minimo assoluto su $I\!R^+$ in $x = 1$ ove $f(1) = \log(2) - 1/\sqrt{2} < 0$. Essendo $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ e $f(1) < 0$ deduciamo che $f$ ha almeno uno zero nell'intervallo $(0,1]$. Essendo $f'(x) < 0$ per $x \in (0,1)$ si ha che $f$ è strettamente decrescente e quindi iniettiva su $(0,1]$ da cui concludiamo che $f$ ha esattamente uno zero in $(0,1]$. Essendo $f'(x) > 0$ per $x > 1$ si ha che $f$ è strettamente crescente su $[1,+\infty)$ da cui, per il fatto che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, concludiamo che $f(x) < 0$ per $x \in [1,+\infty)$.
Concludiamo che l'equazione data ha esattamente una soluzione $x \in (0,1)$.

**3)** Determinare al variare di $\alpha \in I\!R$ il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (e^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1).$$

*Possibile soluzione:* Scriviamo la serie nella forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ ove $a_n = e^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1$.
Se $\alpha < 0$ si ha $-\alpha > 0$ da cui $\frac{1}{n^\alpha} = n^{-\alpha} \to +\infty$ per $n \to +\infty$. Deduciamo che se $\alpha < 0$ si ha $a_n = e^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1 \to +\infty$ per $n \to +\infty$ da cui la serie proposta risulta irregolare.
Se $\alpha = 0$ si ha $\frac{1}{n^\alpha} = 1$ per ogni $n \in I\!N$ da cui $a_n = e^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1 = e - 1 > 0$ e anche in questo caso la serie proposta risulta irregolare.
Se $\alpha > 0$ si ha che $\frac{1}{n^\alpha}$ costituisce una successione decrescente e convergente a zero. Deduciamo che anche la successione $a_n = e^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1$ è una successione decrescente a zero e il criterio di Leibniz ci permette di concludere che la serie proposta è in questi casi convergente. Notiamo anche che essendo

$|(-1)^n a_n| = a_n \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, per il criterio degli infinitesimi la serie converge assolutamente solo se $\alpha > 1$.

**4)** Determinare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x}+x)}\,dx$$

e calcolarlo.

*Possibile soluzione:* Essendo $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x}+x)}$ continua su $(0,+\infty)$ l'integrale risulta convergente qualora lo siano i due integrali impropri $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x}+x)}\,dx$ e $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x}+x)}\,dx$. Essendo $f$ continua e positiva su $(0,1]$ ed essendo $\frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x}+x)} \sim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}}$ si ha per il criterio degli infinitesimi che $I_1 < +\infty$. Essendo $f$ continua e positiva su $[1,+\infty)$ ed essendo $\frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x}+x)} \sim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}$ si ha per il criterio degli infinitesimi che $I_2 < +\infty$. Ciò prova che l'integrale proposto è convergente.
Per calcolare l'integrale operiamo la sostituzione $x = t^2$ ottenendo

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x}+x)}\,dx|_{x=t^2} &= \int \frac{1}{t\,(1+t+t^2)}\,2tdt = 2\int \frac{1}{1+t+t^2}\,dt = 2\int \frac{1}{(1/2+t)^2+3/4}\,dt \\
&= \frac{4}{\sqrt{3}}\int \frac{2/\sqrt{3}}{(1/\sqrt{3}+2t/\sqrt{3})^2+1}\,dt = \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan(1/\sqrt{3}+2t/\sqrt{3})+c \\
&= \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan(1/\sqrt{3}+2\sqrt{x/3})+c|_{x=t^2}
\end{aligned}$$

da cui

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x}+x)}\,dx = \frac{4}{\sqrt{3}}(\pi/2 - \arctan(1/\sqrt{3})) = \frac{4}{\sqrt{3}}(\pi/2-\pi/6) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

**5)** Sia $f : I\!R \to I\!R$ tale che $f(x+2\pi) = f(x)$ e

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \le \frac{\pi}{2}, \\ -1 & \frac{\pi}{2} < |x| \le \pi. \end{cases}$$

Calcolarne i coefficienti di Fourier.

*Possibile soluzione:* Notiamo che $f$ è una funzione pari e come noto sono nulli tutti i coefficienti $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$ $(k \in I\!N)$. Restano da calcolare i coefficienti $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$ e $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx$. Si ha $(k \in I\!N)$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\Big(\int_0^{\pi/2} 1\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} -1\,dx\Big) = 0 \\
a_k &= \frac{2}{\pi}\Big(\int_0^{\pi/2} \cos(kx)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} -\cos(kx)\,dx\Big) = \frac{2}{k\pi}([\sin(kx)]_0^{\pi/2} - [\sin(kx)]_{\pi/2}^{\pi}) = \frac{4}{k\pi}\sin(\frac{k\pi}{2}).
\end{aligned}$$

Notando che $\sin(\frac{k\pi}{2}) = 0$ se $k$ è pari e che per $k = 2j-1$ si ha $\sin(\frac{k\pi}{2}) = (-1)^{j-1} = (-1)^{\frac{k-1}{2}}$, concludiamo

$$a_0 = 0 \quad \text{e} \quad a_k = \begin{cases} \frac{4}{k\pi}(-1)^{\frac{k-1}{2}} & k \text{ dispari} \\ 0 & k \text{ pari.} \end{cases}$$