Corsi di Laurea in Ingegneria Edile e Architettura
Prova scritta di Analisi Matematica 1 del 6/02/2010

1) Mostrare che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin(-x)}{\cos^2(x)} - \frac{x}{x^2-1}}{\sin(-x)\log((1+x^2)^{-1/2})} = \frac{1}{3}.$$

Possibile soluzione: Considerando dapprima il denominatore notiamo che essendo $\sin(-x) \sim_{x\to 0} -x$ e che $\log((1+x^2)^{-1/2}) = -\frac{1}{2}\log(1+x^2) \sim_{x\to 0} -\frac{1}{2}x^2$, otteniamo $\sin(-x)\log((1+x^2)^{-1/2}) \sim_{x\to 0} \frac{1}{2}x^3$. Visto che $\frac{1}{\cos^2(x)(x^2-1)} \sim_{x\to 0^+} -1$ otteniamo allora

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{\sin(-x)}{\cos^2(x)} - \frac{x}{x^2-1}}{\sin(-x)\log((1+x^2)^{-1/2})} &\sim_{x\to 0^+} 2\frac{\frac{\sin(-x)}{\cos^2(x)} - \frac{x}{x^2-1}}{x^3} = \frac{2}{\cos^2(x)(x^2-1)}\frac{\sin(-x)(x^2-1) - x\cos^2(x)}{x^3} \\
&\sim_{x\to 0^+} -2\frac{\sin(-x)(x^2-1) - x\cos^2(x)}{x^3}.
\end{aligned}$$

Determiniamo ora il limite di tale ultima forma utilizzando gli sviluppi di MacLaurin (prima variante) ed il teorema di De L'Hôpital (seconda variante).

Prima variante: Dato che il denominatore di tale ultima forma è un infinitesimo di ordine 3 determiniamo lo sviluppo del suo numeratore a meno di $o(x^3)$. Essendo noto che per $x \to 0^+$ si ha $\sin(-x) = -x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ e che $\cos^2(x) = (1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3))^2 = 1 - x^2 + o(x^3)$, otteniamo che per $x \to 0^+$ si ha

$$\sin(-x)(x^2-1) - x\cos^2(x) = (-x + \frac{x^3}{6} + o(x^3))(x^2-1) - x(1 - x^2 + o(x^3)) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

e dunque

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin(-x)}{\cos^2(x)} - \frac{x}{x^2-1}}{\sin(-x)\log((1+x^2)^{-1/2})} = \lim_{x\to 0^+} -2\frac{\sin(-x)(x^2-1) - x\cos^2(x)}{x^3} = -2\lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

Seconda variante: Osserviamo che

$$\begin{aligned}
-2\frac{\sin(-x)(x^2-1) - x\cos^2(x)}{x^3} &= -2\frac{\sin(-x)}{x} - 2\frac{-\sin(-x) - x(1-\sin^2(x))}{x^3} \\
&= -2\frac{\sin(-x)}{x} - 2\frac{\sin^2(x)}{x^2} - 2\frac{-\sin(-x) - x}{x^3}.
\end{aligned}$$

Essendo che $\lim_{x\to 0^+} -2\frac{\sin(-x)}{x} - 2\frac{\sin^2(x)}{x^2} = 0$ otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} -2\frac{\sin(-x)(x^2-1) - x\cos^2(x)}{x^3} = -2\lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin(-x) - x}{x^3} =^{(H)} -2\lim_{x\to 0^+} \frac{+\cos(-x) - 1}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

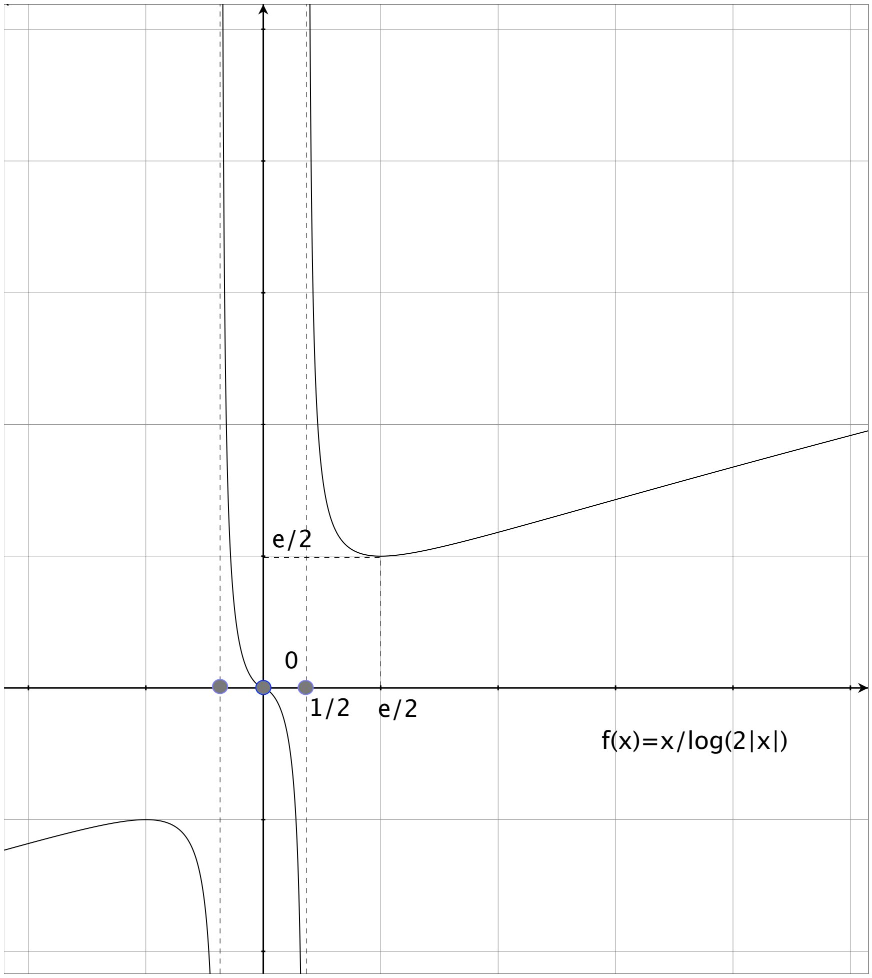

Figure 1: la funzione $f(x) = \frac{x}{\log(2|x|)}$

2) Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{x}{\log(2|x|)}$$

Possibile soluzione: La funzione risulta definita su $\mathcal{D}(f) = \{x \in I\!R \ / \ |x| > 0 \text{ e } 2|x| \neq 1\} = I\!R \setminus \{-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\}$. Notiamo inoltre che f è una funzione dispari essendo $f(-x) = \frac{-x}{\log(2|x|)} = -\frac{x}{\log(2|x|)} = -f(x)$ e possiamo limitarne lo studio sull'insieme $\mathcal{D}^+(f) = \mathcal{D}(f) \cap I\!R^+ = (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$.
Essendo $|x| = x$ per $x > 0$, si ha $f(x) = \frac{x}{\log(2x)}$ per $x \in \mathcal{D}^+(f)$ e $sgn(f(x)) = sgn(\log(2x))$ per $x \in \mathcal{D}^+(f)$, essendo quindi che $f(x) < 0$ per $x \in (0, \frac{1}{2})$ e $f(x) > 0$ per $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$.
Per quanto riguarda il comportamento asintotico di f si ha che

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\log(2x)} = [\frac{0^+}{-\infty}] = 0^{[-]}, \qquad \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{x}{\log(2x)} = [\frac{\frac{1}{2}}{0^-}] = -\infty,$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{x}{\log(2x)} = [\frac{\frac{1}{2}}{0^+}] = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\log(2x)} =^{gerarchia\ infiniti} +\infty.$$

Essendo $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\log(2x)} = 0$ la funzione non ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
La funzione f risulta derivabile su $\mathcal{D}^+(f)$ con

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{\log(2x) - 1}{\log^2(2x)}, \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}^+(f).$$

Si ha allora che $sgn(f'(x)) = sgn(\log(2x) - 1)$ per $x \in \mathcal{D}^+(f)$, cioè $f'(x) < 0$ per $x \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{e}{2})$ e $f'(x) > 0$ per $x \in (\frac{e}{2}, +\infty)$. Concludiamo che f risulta decrescente in $(0, \frac{1}{2})$, decrescente in $(\frac{1}{2}, \frac{e}{2}]$ e crescente in $[\frac{e}{2}, +\infty)$. Il punto $\frac{e}{2}$ è un punto di minimo relativo per f (di minimo assoluto relativamente all'intervallo $(\frac{1}{2}, +\infty)$) ove $f(\frac{e}{2}) = \frac{e}{2\log(2\frac{e}{2})} = \frac{e}{2}$. Visto che $f(x) \to 0$ per $x \to 0^+$ è anche utile notare che $f'(x) = \frac{\log(2x)-1}{\log^2(2x)} = \frac{1}{\log(2x)}(1 - \frac{1}{\log(2x)}) \to 0$ per $x \to 0^+$.
La funzione f' risulta derivabile su $\mathcal{D}^+(f)$ con

$$\frac{d^2}{d^2x} f(x) = \frac{2 - \log(2x)}{x \log^3(2x)}, \qquad \forall\, x \in \mathcal{D}^+(f).$$

Se $x \in (0, \frac{1}{2})$, essendo $\log^3(2x) < 0$, si ha che $sgn(f''(x)) = sgn(\log(2x) - 2)$. Concludiamo che $f''(x) < 0$ per ogni $x \in (0, \frac{1}{2})$ e dunque che f risulta concava (strettamente) su $(0, \frac{1}{2})$.
Se $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$, essendo $\log^3(2x) > 0$, si ha che $sgn(f''(x)) = sgn(2 - \log(2x))$. Concludiamo che $f''(x) > 0$ per ogni $x \in (\frac{1}{2}, \frac{e^2}{2})$ e $f''(x) < 0$ per ogni $x \in (\frac{e^2}{2}, +\infty)$. Dunque che f risulta convessa (strettamente) su $(\frac{1}{2}, \frac{e^2}{2})$ e concava (strettamente) su $(\frac{e^2}{2}, +\infty)$ presentando un flesso in $\frac{e^2}{2}$ ove $f(\frac{e^2}{2}) = \frac{e^2}{4}$ e $f'(\frac{e^2}{2}) = \frac{1}{4}$.

3) Si determini il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n)^{n/2} + \sqrt{n}}.$$

Possibile soluzione: La serie ha termine n-esimo $a_n = \frac{1}{\log(n)^{n/2}+\sqrt{n}} > 0$. Essendo $\frac{n}{\log(n)^n} \to 0$ per $n \to +\infty$, otteniamo che,

$$\frac{a_n}{\frac{1}{\log(n)^{n/2}}} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{n}{\log(n)^n}}} \to 1 \qquad \text{per } n \to +\infty$$

e per il criterio del confronto asintotico il carattere di $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è quello della serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n)^{n/2}}$. Notando che

$$\sqrt[n]{\frac{1}{\log(n)^{n/2}}} = \frac{1}{\log(n)^{1/2}} \to 0 < 1 \qquad \text{per } n \to +\infty,$$

possiamo applicare il criterio della radice a questa ultima serie per concludere che la serie è convergente.
Dal criterio del confronto asintotico risulta convergente anche la serie di partenza.

(Si può procedere anche molto più semplicemente notando che essendo $\sqrt{\log(n)} > 2$ definitivamente si ha anche che $\log(n)^{n/2} + \sqrt{n} > 2^n$ definitivamente e che quindi (passando ai reciproci) $0 < a_n < \frac{1}{2^n}$ definitivamente. Essendo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, Il criterio del confronto permette allora di concludere che la serie in esame è convergente.)

4) Determinare per $\alpha > 0$ il carattere dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{2 - \cos(x)(e^x + e^{-x})}{\sin^\alpha(x)(1 - \cos(x))}\, dx$$

Possibile soluzione: Notiamo che la funzione $f(x) = \frac{2-\cos(x)(e^x+e^{-x})}{\sin^\alpha(x)(1-\cos(x))}$ risulta continua su $(0, 1]$. Allo scopo di determinare il carattere dell'integrale studiamo il comportamento asintotico di f per $x \to 0^+$. Dal fatto noto che $\sin(x) \sim_{x\to 0} x$ e $1 - \cos(x) \sim_{x\to 0} \frac{x^2}{2}$ otteniamo subito che $\sin^\alpha(x)(1 - \cos(x)) \sim_{x\to 0} \frac{x^{2+\alpha}}{2}$ e dunque che $f(x) \sim_{x\to 0^+} 2\frac{2-\cos(x)(e^x+e^{-x})}{x^{2+\alpha}}$. Sapendo che $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ e che $e^x + e^{-x} = 2\cosh(x) = 2 + x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4)$ per $x \to 0^+$ abbiamo che

$$2 - \cos(x)(e^x + e^{-x}) = 2 - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)(2 + x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4)) = \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0^+,$$

e dunque

$$f(x) \sim_{x\to 0^+} \frac{2x^4 + o(x^4)}{3x^{2+\alpha}} \sim_{x\to 0^+} \frac{2}{3x^{\alpha-2}}.$$

Dal Teorema del confronto asintotico deduciamo che il carattere di $\int_0^1 f(x)\, dx$ è quello di $\int_0^1 \frac{2}{3x^{\alpha-2}}\, dx$ che risulta convergente se $\alpha - 2 < 1$. cioè $\alpha < 3$, e positivamente divergente se $\alpha \geq 3$.

5) Determinatone l'insieme di convergenza calcolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n^2 + \frac{1}{n}) \log^n(x)$$

Possibile soluzione: Posto $y = \log(x)$ la serie si scrive nella forma $\sum_{n=1}^{+\infty}(n^2 + \frac{1}{n})y^n$, una serie di potenze in y di punto iniziale $y_0 = 0$ e coefficienti $a_0 = 0$, $a_n = (n^2 + \frac{1}{n})$ per $n \geq 1$.
Applicando il criterio del rapporto, visto che $\frac{a_{n+1}}{a_n} =^{(n>0)} \frac{n((n+1)^3+1)}{(n+1)(n^3+1)} \to_{n\to+\infty} 1$, la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n y^n$ ha raggio di convergenza 1 risultando assolutamente convergente per $|y| < 1$ e non convergente per $|y| > 1$. Da ciò deriviamo che la serie in studio risulta assolutamente convergente se $|\log(x)| < 1$, cioè se $x \in (\frac{1}{e}, e)$ e non convergente se $|\log(x)| > 1$, cioè se $x \in (0, \frac{1}{e}) \cup (e, +\infty)$. Se $|\log(x)| = 1$ essendo $a_n \to +\infty$ la serie non è convergente. Concludiamo allora che la serie converge (infatti converge assolutamente) solo se $x \in (\frac{1}{e}, e)$.
Per calcolare la serie osserviamo che se $|y| < 1$ allora risultano convergenti anche le serie $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 y^n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} y^n$ valendo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(n^2 + \frac{1}{n})y^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 y^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} y^n = y\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{d}{dy}y^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^y t^{n-1}\, dt.$$

Utilizzando i teoremi di derivazione ed integrazione termine a termine delle serie di potenze e la nota identità $\sum_{n=0}^{+\infty} y^n = \frac{1}{1-y}$ $(|y| < 1)$ otteniamo allora

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}(n^2 + \frac{1}{n})y^n &= y\frac{d}{dy}\sum_{n=1}^{+\infty} ny^n + \int_0^y \sum_{n=1}^{+\infty} t^{n-1}\, dt = y\frac{d}{dy}\left(y\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d}{dy}y^n\right) + \int_0^y \frac{1}{1-t}\, dt \\
&= y\frac{d}{dy}\left(y\frac{d}{dy}\sum_{n=1}^{+\infty} y^n\right) - \log(1-y) = y\frac{d}{dy}\left(y\frac{d}{dy}\frac{1}{1-y}\right) - \log(1-y) \\
&= y\frac{d}{dy}\frac{y}{(1-y)^2} - \log(1-y) = \frac{y}{(1-y)^2} + \frac{2y^2}{(1-y)^3} - \log(1-y).
\end{aligned}$$

Sostituendo $y = \log(x)$ otteniamo che per $x \in (\frac{1}{e}, e)$ si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(n^2 + \frac{1}{n})\log^n(x) = \frac{\log(x)}{(1-\log(x))^2} + \frac{2\log(x)^2}{(1-\log(x))^3} - \log(1-\log(x)).$$