Corsi di Laurea in Ingegneria Edile e Architettura
Prova scritta di Analisi Matematica 1 del 16/01/2010

1) Vale che $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos(x)} - \cos(\frac{x}{\sqrt{2}})}{\log(1+\frac{x}{12})(\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2})}$ è uguale a:

Possibile soluzione: Considerato il denominatore notiamo che essendo

$$\log(1+\frac{x}{12}) \sim_{x\to 0} \frac{x}{12} \quad \text{e} \quad \sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2} =_{x\to 0} 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)-1-\frac{x}{2} \sim_{x\to 0} -\frac{x^2}{8},$$

allora

$$\log(1+\frac{x}{12})(\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}) \sim -\frac{x^3}{96} \quad \text{per } x\to 0.$$

Visto che il denominatore è un infinitesimo di ordine 3 per il calcolo del limite sarà sufficiente determinare lo sviluppo del numeratore a meno di $o(x^3)$. Osserviamo che essendo per $x\to 0$ che

$$\begin{aligned}
\sqrt{\cos(x)} &= \sqrt{1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)} = 1-\frac{x^2}{4}+o(x^3)-\frac{1}{8}(-\frac{x^2}{4}+o(x^3))^2+o((-\frac{x^2}{4}+o(x^3))^2) = \\
&= 1-\frac{x^2}{4}+o(x^3), \\
\cos(\frac{x}{\sqrt{2}}) &= 1-\frac{x^2}{4}+o(x^3),
\end{aligned}$$

allora

$$\sqrt{\cos(x)} - \cos(\frac{x}{\sqrt{2}}) = o(x^3) \quad \text{per } x\to 0.$$

Concludiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos(x)} - \cos(\frac{x}{\sqrt{2}})}{\log(1+\frac{x}{12})(\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2})} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{-\frac{x^3}{96}} = 0.$$

2) Determinare per quali α, $\beta \in I\!R$ risulta derivabile in $x_0 = 0$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - \sqrt{1+\alpha x}}{x} & \text{se } x > 0 \\ 1-\sin\beta x & \text{se } x \le 0. \end{cases}$$

Possibile soluzione: Notiamo che per ogni α, $\beta \in I\!R$ si ha

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 1-\sin\beta x = 1 = f(0).$$

D'altra parte, utilizzando i noti sviluppi $e^y = 1+y+\frac{y^2}{2}+o(y^2)$ e $\sqrt{1+y} = 1+\frac{y}{2}-\frac{y^2}{8}+o(y^2)$ per $y\to 0$, otteniamo che

$$e^x - \sqrt{1+\alpha x} = (1-\frac{\alpha}{2})x + (\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{8})x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x\to 0,$$

da cui

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-\sqrt{1+\alpha x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} (1-\frac{\alpha}{2}) + (\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{8})x + o(x) = 1-\frac{\alpha}{2}.$$

Concludiamo che f risulta continua in $x_0 = 0$ quando $1 - \frac{\alpha}{2} = 1$, cioè per $\alpha = 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$.
Posto $\alpha = 0$, si ha che $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{se } x > 0 \\ 1 - \sin \beta x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$, e che dunque il suo rapporto incrementale in x_0 può essere scritto nella forma

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \begin{cases} \dfrac{\frac{e^x-1}{x} - 1}{x} = \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{1 - \sin \beta x - 1}{x} = -\dfrac{\sin \beta x}{x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Essendo $e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$ otteniamo $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}$ e quindi f risulta sempre derivabile da destra in $x_0 = 0$ con $D_+ f(0) = \frac{1}{2}$. Per la derivabilità da sinistra in x_0, osserviamo che essendo $\sin(\beta x) = \beta x + o(x^2)$ per $x \to 0$ abbiamo $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} -\frac{\beta x + o(x^2)}{x} = -\beta$. Ciò implica che se $\alpha = 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ la funzione data risulta sempre derivabile anche da sinistra in x_0 con $D_- f(0) = -\beta$.
Concludiamo che f risulta derivabile in $x_0 = 0$ solo per $\alpha = 0$ e $\beta = -\frac{1}{2}$ valendo in tal caso $f'(0) = \frac{1}{2}$.

3) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $|x^2 - 1| \mathrm{e}^{-|x-1|} = 1$.

Possibile soluzione: Poniamo $f(x) = |x^2 - 1|\mathrm{e}^{-|x-1|}$ o equivalentemente

$$f(x) = \begin{cases} (x^2-1)e^{1-x} & \text{se } x > 1 \\ (1-x^2)e^{x-1} & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ (x^2-1)e^{x-1} & \text{se } x < -1, \end{cases}$$

e determiniamo il numero di punti ove valga $f(x) = 1$. Come composta di funzioni continue f è definita e continua su $\mathbb{R}$ valendo che, per il teorema di gerarchia degli infiniti,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^2 - 1)e^{x-1} =^{(y=1-x)} \lim_{y \to +\infty} \frac{y^2 - 2y}{e^y} = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^2 - 1)e^{1-x} =^{(y=x-1)} \lim_{y \to +\infty} \frac{y^2 + 2y}{e^y} = 0$$

Risulta inoltre $f(x) \geq 0$ per $x \in \mathbb{R}$ e $f(x) = 0$ se e solo se $x = \pm 1$.

Come composta di funzioni derivabili f risulta derivabile su $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Utilizzando lo studio del segno della derivata di f determiniamo separatemente il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = 1$ sui ciascuno dei tre intervalli $(-\infty, -1]$, $[-1, 1]$ e $[1, +\infty)$.

Se $x \in (-\infty, -1)$ allora $f'(x) = e^{x-1}(x^2 + 2x - 1)$ e $sgn(f'(x)) = sgn(x^2 + 2x - 1)$. Essendo $x^2 + 2x - 1 > 0$ per $x \in (-\infty, -1 - \sqrt{2})$ e $x^2 + 2x - 1 < 0$ per $x \in (-1 - \sqrt{2}, -1)$ ciò vale anche per il segno di $f'(x)$ da cui f risulta crescente su $(-\infty, -1 - \sqrt{2}]$ e decrescente su $[-1 - \sqrt{2}, 1]$. Ciò implica che se $x \in (-\infty, -1]$ allora $f(x) \leq f(-1 - \sqrt{2}) = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{e^{\sqrt{2}+2}} < 1$ e l'equazione $f(x) = 1$ non ha soluzioni sull'intervallo $(-\infty, -1]$.

Se $x \in (-1, 1)$ allora $f'(x) = e^{x-1}(1 - 2x - x^2)$ e $sgn(f'(x)) = sgn(1 - 2x - x^2)$. Essendo $1 - 2x - x^2 < 0$ per $x \in (-1 + \sqrt{2}, 1]$ e $1 - 2x - x^2 > 0$ per $x \in [-1, -1 + \sqrt{2})$ ciò vale anche per il segno di $f'(x)$ da cui f risulta crescente su $[-1, -1 + \sqrt{2}]$ e decrescente su $[-1 + \sqrt{2}, 1]$. Ciò implica che se $x \in [-1, 1]$ allora $f(x) \leq f(-1 + \sqrt{2}) = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{e^{2-\sqrt{2}}} < 1$ e l'equazione $f(x) = 1$ non ha soluzioni sull'intervallo $[-1, 1]$.

Se $x \in (1, +\infty)$ allora $f'(x) = e^{1-x}(1 + 2x - x^2)$ e $sgn(f'(x)) = sgn(1 + 2x - x^2)$. Essendo $1 + 2x - x^2 > 0$ per $x \in (1, 1 + \sqrt{2})$ e $1 + 2x - x^2 > 0$ per $x \in (1 + \sqrt{2}, +\infty)$ ciò vale anche per il segno di $f'(x)$ da cui f risulta crescente su $[1, 1 + \sqrt{2}]$ e decrescente su $[1 + \sqrt{2}, +\infty)$. Valendo $f(1) = 0 < 1 <$

$\frac{2(\sqrt{2}+1)}{e^{\sqrt{2}}} = f(1+\sqrt{2})$ per il teorema dei valori intermedi la funzione f assume almeno una volta il valore 1 in $[1, 1+\sqrt{2}]$ ed essendo f strettamente monotona su tale intervallo lo assume una sola volta. Analogamente essendo $f(1+\sqrt{2}) > 1 > 0 = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ per il teorema dei valori intermedi la funzione f assume almeno una volta il valore 1 in $[1+\sqrt{2}, +\infty)$ ed essendo f strettamente monotona su tale intervallo lo assume una sola volta.

Concludiamo che l'equazione proposta ha esattamente due soluzioni.

4) Determinare $\displaystyle\int_0^2 |x^2-1|e^x\,dx$.

Possibile soluzione: Essendo $|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & \text{se } 1 \le x \le 2 \\ 1-x^2 & \text{se } 0 \le x \le 1 \end{cases}$, si ha $\int_0^2 |x^2-1|e^x\,dx = \int_0^1 (1-x^2)e^x\,dx - \int_1^2 (1-x^2)e^x\,dx$. Integrando per parti

$$\int (1-x^2)e^x\,dx = (1-x^2)e^x + 2\int xe^x\,dx = -x^2e^x + 2xe^x - e^x + c, \qquad x, c \in \mathbb{R}$$

da cui

$$\int_0^2 |x^2-1|e^x\,dx = [-x^2e^x + 2xe^x - e^x]_0^1 - [-x^2e^x + 2xe^x - e^x]_1^2 = 1 + e^2.$$

5) Determinatone l'insieme di convergenza, calcolare $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)x^{2n}$.

Possibile soluzione: Posto $y = x^2$ la serie si scrive nella forma $\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)y^n$, una serie di potenze in y di punto iniziale $y_0 = 0$ e coefficienti $a_0 = 0$, $a_n = n+1$ per $n \ge 1$.
Applicando il criterio del rapporto, visto che $\frac{a_{n+1}}{a_n} =^{(n>0)} \frac{n}{n+1} \to_{n\to+\infty} 1$, la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)y^n$ ha raggio di convergenza 1 risultando assolutamente convergente per $|y| < 1$ e non convergente per $|y| > 1$. Da ciò deriviamo che $\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)(x^2)^n$ risulta assolutamente convergente se $|x^2| = x^2 < 1$, cioè se $|x| < 1$ e positivamente divergente (visto che si tratta di una serie a termini non negativi) se $|x^2| = x^2 > 1$, cioè se $|x| > 1$. Se $x = \pm 1$ la serie si riduce alla serie positivamente divergente $\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)$. Concludiamo che la serie proposta risulta assolutamente convergente se $|x| < 1$ e positivamente divergente se $|x| \ge 1$.
Per calcolare la serie osserviamo che grazie alla nota identità $\sum_{n=0}^{+\infty} y^n = \frac{1}{1-y}$ ($|y| < 1$) ed al teorema di derivazione termine a termine si ha per ogni $y \in (-1,1)$ vale

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)y^n &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d}{dy}y^{n+1} = \frac{d}{dy}\sum_{n=1}^{+\infty}y^{n+1} = \frac{d}{dy}\sum_{n=2}^{+\infty}y^n = \\ &= \frac{d}{dy}[(\sum_{n=0}^{+\infty}y^n) - 1 - y] = \frac{d}{dy}(\frac{1}{1-y} - y) = \frac{d}{dy}\frac{y^2}{1-y} = \frac{2y-y^2}{(1-y)^2}.\end{aligned}$$

Posto $y = x^2$, deriviamo allora che per ogni $x \in (-1,1)$ si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)x^{2n} = \frac{2x^2-x^4}{(1-x^2)^2}.$$