

Corsi di Laurea in Ingegneria Gestionale
Prova scritta di Matematica 1 del 27/01/2012

COGNOME _____ NOME _____

MATRICOLA _____

1) Mostrare che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cos^2(x) - \sin(x)(1 - x^2)}{\sin(x) \log(\sqrt{1 + x^2})} = \frac{1}{3}.$$

Possibile soluzione: Considerando dapprima il denominatore notiamo che essendo $\sin(x) \sim_{x \rightarrow 0} x$ e che $\log((1 + x^2)^{1/2}) = \frac{1}{2} \log(1 + x^2) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} x^2$, ottenendo $\sin(x) \log((1 + x^2)^{1/2}) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} x^3$. Dato che il denominatore è un infinitesimo di ordine 3 determiniamo lo sviluppo del numeratore a meno di $o(x^3)$. Per $x \rightarrow 0^+$ si ha $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ e $\cos^2(x) = (1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3))^2 = 1 - x^2 + o(x^3)$, da cui otteniamo che per $x \rightarrow 0^+$

$$x \cos^2(x) - \sin(x)(1 - x^2) = x(1 - x^2 + o(x^3)) - (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))(1 - x^2) = \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Dunque

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cos^2(x) - \sin(x)(1 - x^2)}{\sin(x) \log(\sqrt{1 + x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \frac{x \cos^2(x) - \sin(x)(1 - x^2)}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

Seconda variante: Osserviamo che

$$2 \frac{x \cos^2(x) - \sin(x)(1 - x^2)}{x^3} = 2 \frac{\sin(x)}{x} - 2 \frac{\sin^2(x)}{x^2} + 2 \frac{x - \sin(x)}{x^3}$$

e quindi che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \frac{x \cos^2(x) - \sin(x)(1 - x^2)}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin(x)}{x^3} \stackrel{(H)}{=} 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(x)}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

2) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$|\log(x)| = \frac{1}{x^{1/4}}.$$

Possibile soluzione: Consideriamo la funzione

$$f(x) = |\log(x)| - \frac{1}{x^{1/4}} = \begin{cases} -\log(x) - \frac{1}{x^{1/4}} & x \in (0, 1) \\ \log(x) - \frac{1}{x^{1/4}} & x \geq 1 \end{cases}$$

e studiamo l'equazione $f(x) = 0$. Notiamo che f è continua su $(0, +\infty)$. Inoltre $f(1) = -1 < 0$ e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\log(x) - \frac{1}{x^{1/4}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{1/4}} (-x^{1/4} \log(x) - 1) \stackrel{[+\infty \cdot (-1)]}{=} -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) - \frac{1}{x^{1/4}} = +\infty. \end{aligned}$$

Si ha inoltre che f è derivabile su $(0, 1)$ con

$$f'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{4x^{5/4}} = \frac{1}{4x^{5/4}}(1 - 4x^{1/4}), \quad x \in (0, 1),$$

da cui deduciamo che $f'(x) > 0$ se $x \in (0, \frac{1}{4^4})$ e $f'(x) < 0$ se $x \in (\frac{1}{4^4}, 1)$. Dunque f è strettamente crescente su $(0, \frac{1}{4^4}]$, strettamente decrescente su $[\frac{1}{4^4}, 1]$, presentando un massimo relativo in $\frac{1}{4^4}$ ove $f(\frac{1}{4^4}) = 4(\log(4) - 1) > 0$.

Essendo $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $f(\frac{1}{4^4}) > 0$ e f continua e crescente su $(0, \frac{1}{4^4}]$, deduciamo che f ha esattamente uno zero in $(0, \frac{1}{4^4}]$.

Essendo $f(\frac{1}{4^4}) > 0$, $f(1) = -1 < 0$ e f continua e decrescente su $[\frac{1}{4^4}, 1)$, deduciamo che f ha esattamente uno zero in $[\frac{1}{4^4}, 1]$.

Infine, se $x \in (1, +\infty)$ si ha che f è derivabile con

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{4x^{5/4}} > 0, \quad x \in (1, +\infty),$$

da cui deriviamo che f è strettamente crescente su $[1, +\infty)$. Essendo $f(1) = -1 < 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ deduciamo che f ha esattamente uno zero in $[1, +\infty)$.

Concludiamo che l'equazione proposta ha esattamente tre soluzioni.

3) Determinare l'ordine di infinitesimo per $x \rightarrow 0$ della funzione

$$f(x) = e^{\sin x^2} - 2\sqrt{1+x^2} + 1.$$

Possibile soluzione: Determiniamo lo sviluppo di Taylor di f di punto iniziale 0 all'ordine 4 (se lo sviluppo risultasse uguale a 0 bisognerebbe procedere nella determinazione dei termini successivi).

Osservato che $\sin x^2 =_{x \rightarrow 0} x^2 + o(x^4)$ si ha che $(\sin x^2)^k =_{x \rightarrow 0} o(x^4)$ per $k > 2$, da cui

$$e^{\sin x^2} =_{x \rightarrow 0} 1 + \sin x^2 + (\sin x^2)^2/2 + o(x^4) =_{x \rightarrow 0} 1 + x^2 + x^4/2 + o(x^4).$$

Analogamente otteniamo

$$\sqrt{1+x^2} =_{x \rightarrow 0} 1 + x^2/2 - (x^2)^2/8 + o((x^2)^2) =_{x \rightarrow 0} 1 + x^2/2 - x^4/8 + o(x^4)$$

da cui

$$f(x) =_{x \rightarrow 0} x^4/2 + o(x^4) + x^4/4 + o(x^4) =_{x \rightarrow 0} 3x^4/4 + o(x^4)$$

che ci permette di concludere che $\text{ord}(f(x)) =_{x \rightarrow 0} 4$.

4) Determinare per quali $\alpha > 0$ risulta convergente l'integrale improprio

$$\int_0^1 x^\alpha \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx$$

e calcolarlo per $\alpha = 0$.

Possibile soluzione: Posto $f_\alpha(x) = x^\alpha \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ si ha che f_α è positiva e continua su $(0, 1]$ ed inoltre $f_\alpha(x) \sim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{1/2-\alpha}}$. Per il criterio del confronto asintotico il carattere dell'integrale improprio $\int_0^1 f_\alpha(x) dx$ è lo stesso dell'integrale $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2-\alpha}} dx$ che notoriamente è convergente per $1/2 - \alpha < 1$ cioè $\alpha > -1/2$ e divergente per $1/2 - \alpha \geq 1$ cioè $\alpha \leq -1/2$. Concludiamo che l'integrale è convergente per tutti gli $\alpha > 0$.

Per calcolare l'integrale nel caso di $\alpha = 0$ poniamo $t = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$ da cui $x = \frac{1}{t^2-1}$ e quindi

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx \Big|_{x=\frac{1}{t^2-1}} &= \int t \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t^2-1} \right) dt = \frac{t}{t^2-1} - \int \frac{1}{t^2-1} dt = \frac{t}{t^2-1} - \int \frac{1-t+t}{t^2-1} dt \\ &= \frac{t}{t^2-1} + \int \frac{1}{t+1} dt - \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2-1} dt \\ &= \frac{t}{t^2-1} + \log|t+1| - \frac{1}{2} \log|t^2-1| + c \end{aligned}$$

cioè

$$\int \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx = \sqrt{x(x+1)} + \log(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) + c.$$

Concludiamo che

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx = \sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}).$$

5) Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il carattere (convergenza semplice, assoluta) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Possibile soluzione: Notiamo anzitutto che se $\alpha \leq 0$ si ha che $\sin(\frac{1}{n^\alpha}) \not\rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ e dunque la serie non è convergente.

Considerando il caso $\alpha > 0$, per definizione la serie converge assolutamente se è convergente la serie dei moduli dei suoi termini, cioè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n^\alpha})$. Essendo $\sin(\frac{1}{n^\alpha}) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, per il criterio del confronto asintotico il carattere di tale serie è quello della serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, che, come noto, è convergente solo nel caso $\alpha > 1$. Concludiamo che la serie proposta è assolutamente convergente se $\alpha > 1$.

Se $\alpha \in (0, 1]$ la serie non converge assolutamente ma possiamo usare il criterio di Leibniz per studiarne la convergenza semplice. Infatti posto $a_n = \sin(\frac{1}{n^\alpha})$ riconosciamo che per ogni $\alpha \in (0, 1]$ la successione a_n è decrescente a zero e la serie proposta si può scrivere nella forma $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$. Viste le proprietà della successione a_n , dal criterio di Leibniz concludiamo che la serie è semplicemente convergente per ogni $\alpha \in (0, 1]$.