Primo Parziale di Geometria per Ingegneria A. T.

Sessione Invernale — Anno Accademico 2003–2004 — 3 Novembre 2003

Cognome: Nome: Matricola: Immatricolato nel

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su **ogni** *foglio che consegnerai devi scrivere, in* **stampatello,** *nome, cognome e numero di matricola. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio).*

Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma sui fogli protocollo a quadretti che hai debitamente portato con te. Dev'essere **ben** *chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.*

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se **più di una** *risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (e s'intende che due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere* **giustificate:** *non basta rispondere "Si" o "No". Se ritieni che l'affermazione proposta sia sempre vera (o sempre falsa), devi spiegare perchè; se invece pensi sia talvolta falsa (o talvolta vera), devi indicare un esempio concreto in cui lo è.*

Indica con a la ultima cifra del tuo numero di matricola.

1. Esistono due sottospazi U e W di $M_{3,4}(\mathbb{R})$ di dimensioni rispettivamente 5 e $a+3$ che siano supplementari?

2. Calcola il prodotto delle matrici $\begin{vmatrix} 2 & -\pi \\ a-3 & 1 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -\sqrt{3} \\ a-6 & -1 & \sqrt{5} \end{vmatrix}$.

3. Calcola la dimensione del sottospazio S di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $(a-4)e_1+e_4$, $(a-5)e_2-e_4$, $e_1+2e_2+4e_4$.

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $\mathcal{B}$ un sottoinsieme di V contenente m vettori con $m<n$. Dimostra che $\mathcal{B}$ non è un insieme di generatori di V.

B. Considera l'applicazione $F:\mathbb{R}_3[t]\to\mathbb{R}^3$ data da $F(p)=\begin{vmatrix} p(3) \\ (a-4)p(1)-p(0) \\ p(-2) \end{vmatrix}$.

(i) Verifica che F è una applicazione lineare,

(ii) trova nucleo e immagine di F e calcola la dimensione di entrambi;

(iii) dimostra che $V=\{p\in\mathbb{R}_3[t] \ : \ p(0)=p(-1)=0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_3[t]$ e calcolane la dimensione;

(iv) trova una base di $F(V)$.

C. Studia, al variare del parametro reale k il seguente sistema lineare e quando possibile trovane le soluzioni

$$\begin{cases} x_1+kx_2+x_3=3, \\ kx_1+3x_2=a-5, \\ 2x_1+(a+1)x_2+2x_3=k+6. \end{cases}$$
