GEOMETRIA

TESTI D'ESAME SVOLTI

tratti dagli appelli della

Prof.ssa **Chiara de Fabritiis**

a cura di

Gasparini Christiam

Anno Accademico 2001-2002

Prefazione (ovvero, istruzioni per l'uso!).

*Il presente lavoro nasce alla fine di due anni di esperienza di tutorato del corso di Geometria all'interno della Facoltà di Ingegneria ed è pensato come **ausilio** alla preparazione dell'esame e* <u>*solo*</u> *per questo unico scopo. Gli esercizi sono discussi in maniera molto estesa, cercando di risolvere, o quantomeno far venire alla luce, dubbi tipici degli studenti nei confronti di una materia che può sembrare a prima vista astratta, ma che in realtà fornisce metodi molto potenti per risolvere problemi di grande interesse pratico ed ingegneristico. Nell'ambito dello svolgimento delle soluzioni vengono forniti dei richiami teorici, al fine di creare un continuo legame tra prassi e teoria che spesso viene a mancare, ma che invece risulta indispensabile per una corretta comprensione della stessa materia, nonché per un'adeguata preparazione ad ambo le prove: scritto ed orale. Questa personalissima scelta si fonda sui buoni risultati dal punto di vista didattico che ho avuto modo di riscontrare durante questa esperienza così interessante e sicuramente dal mio punto di vista formativa.*

*Come ho già affermato poche righe sopra, la presente dispensa **non** vuole assolutamente porsi come sostituto ad una **preparazione corretta** dell'esame, quest'ultima basata sullo studio di testi appropriati (imparate a consultare la biblioteca!) e degli appunti delle lezioni (queste regole valgono sempre: in questa, come in altre materie). In particolare suggerisco di andare a verificare sempre quanto letto nei libri di testo consigliati* ([**1**],[**2**]).

*Una precisazione: le soluzioni degli esercizi che vedrete **non** sono un fac-simile delle soluzioni che dovreste scrivere nel vostro foglio protocollo durante lo scritto, visto che sono eccessivamente lunghe per rientrare nei limiti di tempo tipici di un esame (e ve ne renderete sicuramente conto presto anche da soli). Sono rese appositamente lunghe per tentare di spiegare quanto più possibile il **ragionamento** che sta dietro alla soluzione, per poter poi svolgere "con le vostre gambe" tutti gli esercizi simili che incontrerete. È infatti inutile (per il vostro cervello), oltre che snervante, imparare a memoria "come si fa" il singolo esercizio, senza avere la minima idea del perchè e sperando che nel prossimo appello ci sia l'esercizio "uguale ad uno già visto" . Proprio a proposito di questo, voglio scusarmi con chi dovesse leggere questo lavoro e trovare degli errori o delle inesattezze (se trovate qualcosa che non va non prendetevela con la docente, la colpa è tutta mia!), ma i vincoli di tempo per finirlo e per correggerlo sono stati molto stretti rispetto a quanto avrei voluto fare in realtà (non avete idea di quanto ci voglia a scrivere in LATEX!). Spero con tutto il cuore che possiate comunque giovarvene. Non dimenticate che se in generale avete dei dubbi (ma non riguardo a questa dispensa) potete comunque rivolgervi al docente, ai tutor o ai coadiutori, sempre disponibili all'interno della struttura del Dipartimento.*

*Per concludere, un consiglio personalissimo, che si lega a quanto detto sopra. È estremamente importante (per voi) che impariate a ragionare sulle cose, senza by-passare il problema che avete d'innanzi con dei "trucchetti". Oltre alla conoscenza delle metodologie, la caratteristica più importante di un **ingegnere** è infatti riuscire a risolvere i problemi che gli capitano a tiro, anche senza conoscerne a priori l'entità: risultano quindi fondamentali la **capacità di apprendimento** e la **duttilità**, più che le conoscenze specifiche (o perlomeno questo è quello che hanno insegnato a me). Buona lettura ed in bocca al lupo!*

Ancona, Luglio 2002 — Gasparini Christiam

APPELLO DEL 26 MARZO 2002

SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

Domanda filtro 1. L'esercizio chiede di trovare equazioni parametriche e cartesiane del piano π passante per il punto $P = (1, -2, -a)$ e contenente la retta r di equazioni $x-y-z = 1$, $(a-3)x - 2y - z = 2$. Come abbiamo già avuto modo di osservare in altre occasioni (si veda la soluzione del *Quesito C.* dell'appello del *22 Aprile 2002*) il piano π cercato appartiene al fascio di piani che ha per *asse* la retta r, ragion per cui possiamo cercare il piano π tra quelli di equazione

$$\mu \ (x-y-z-1) + \nu \ ((a-3)x - 2y - z - 2) = 0.$$

A questo punto è sufficiente imporre il passaggio del piano per il punto P, sostituendo le coordinate del punto stesso nelle equazioni e trovando per quali valori di μ, ν si ottiene un'uguaglianza. Abbiamo dunque

$$\mu\,(1 - (-2) - (-a) - 1) + \nu\,((a-3)\cdot 1 - 2(-2) - (-a) - 2) = 0.$$

Sviluppando i calcoli si ottiene $\mu(a+2) + \nu(2a-1) = 0$ e ponendo $\nu = -(a+2)$ ed avere di conseguenza $\mu = (2a-1)$.
L'*equazione cartesiana* del piano cercato sarà quindi:

$$\pi : (2a-1)\,(x-y-z-1) - (a+2)\,((a-3)x - 2y - z - 2) = 0,$$

ovvero $(2a-1-(a+2)(a-3))x + 5y - (a-3)z + 5 = 0$. Per passare ad equazioni parametriche sara' sufficiente porre $x = 5t$, $z = 5s$ e ricavare $y = -(2a-1-(a+2)(a-3))t + (a-3)s - 1$.

Domanda filtro 2. Viene chiesto di calcolare il determinante di una matrice A di ordine 4:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & a-4 & -1 & a+1 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}.$$

È necessario applicare la regola di *Laplace* (non si può infatti usare *Sarrus*, in quanto la matrice non è di ordine 3); sviluppando il calcolo sulla prima riga a causa della presenza di due elementi nulli (ma niente sarebbe cambiato utilizzando un'altra riga o colonna per il calcolo del determinante, lo si fa solo per alleggerire la complessità del calcolo) otteniamo:

$$\det(\mathrm{A}) = 1\cdot(-1)^{(1+1)}\det\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ a-4 & -1 & a+1 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)^{1+2}\det\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & a+1 \\ 0 & -1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= \det\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ a-4 & -1 & a+1 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix} + 2\cdot\det\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & a+1 \\ 0 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -16(\mathrm{a}-6) + 2(\mathrm{a}-28) = 40 - 14\mathrm{a}.$$

Domanda filtro 3. L'esercizio chiede se esiste una matrice $A \in M_{2,2}$ simile alla matrice $B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a-2 & -3 \end{vmatrix}$ tale che il suo spettro sia $\{2, -2\}$. Basta ricordare che due matrici simili hanno la stessa traccia per ottenere che non esiste la matrice A cercata in quanto $\mathrm{tr}B = 1 - 3 = 2 \neq 0 = 2 + (-2) = \mathrm{tr}A$.

Quesito A. Sia dato il polinomio

$$P(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2(a+3)x_2x_3 - x_3^2 + 2(a+2)x_1 - a + 3.$$

Punto (i). Si chiede per quali $k \in \mathbb{R}$ il punto $P_k = (a+1, 0, k)$ appartiene alla quadrica Q_P associata al polinomio $P(x)$. Per risolvere questo punto è sufficiente sostituire l'espressione di P_k nella quadrica $P(x) = 0$ e vedere per quali valori di k si verifica un'identità. Così facendo:

$$P(P_k) = (a+1)^2 - k^2 + 2(a+2)(a+1) - a + 3 = 3a^2 + 7a - k^2 + 8 = 0 \Longrightarrow k^2 = 3a^2 + 7a + 8,$$

da cui:

$$k = \pm\sqrt{3a^2 + 7a + 8}.$$

Punto (ii). Viene chiesto di trovare la forma canonica affine della quadrica. Conviene a tal riguardo seguire le regole riportate nel libro di testo. Prima di tutto, scriviamo la quadrica in forma matriciale, avendo posto $\tilde{x} = (x_1\ x_2\ x_3\ 1)^T$:

$$P(x) = P(\tilde{x}) = \tilde{x}^T A \tilde{x},$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & (a+2) \\ 0 & 1 & (a+3) & 0 \\ 0 & (a+3) & -1 & 0 \\ (a+2) & 0 & 0 & (3-a) \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (a+3) \\ (a+2) & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$b = \begin{vmatrix} a+2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad c = 3 - a.$$

La matrice A_3 rappresenta la *parte quadratica* della quadrica, essendo costituita dai coefficienti della parte di potenze di secondo grado appartenenti al polinomio $P(x)$. Di fondamentale importanza è il polinomio caratteristico di A_3 :

$$\det(\lambda I - A_3) = (\lambda - 1)\ (\lambda^2 - (a^2 + 6a + 10))$$

da cui otteniamo per il criterio di Cartesio che due autovalori sono positivi e uno è negativo; la parte omogenea di grado 2 della forma canonica affine della quadrica vale quindi $x^2 + y^2 - z^2$.

Inoltre $\det A_3$ è non nullo, quindi A_3 è invertibile e pertanto la quadrica è a centro. Al fine di determinare la forma canonica affine dell quadrica è sufficiente allora determinare se il termine noto di tale forma canonica valga 1, -1 oppure 0; la parte omogenea di grado 1 è infatti assente essendo la quadrica a centro. Non è difficile verificare che il determinante della matrice A è positivo; poiché il determinante di A_3 è negativo, ne deduciamo che il termine noto della forma canonica affine è -1 e quindi essa è data da

$$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$$

che rappresenta un iperboloide a una falda.

Quesito B. Consideriamo l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ data da: $T(x) = (a+2)x_2 - x_3$ per ogni $x \in \mathbb{R}^4$ e poniamo $V = \mathrm{KerT}$.

Punto (i). Si chiede di calcolare la dimensione di $V = \mathrm{Ker}T$. Per far questo è possibile studiare direttamente le equazioni relative al nucleo, imponendo quindi che i *trasformati* secondo T dei vettori x appartenenti al dominio $\mathbb{R}^4$ siano uguali al vettore nullo dello spazio di arrivo, che in questo caso coincide proprio con uno scalare: $T(x) = (a+2)x_2 - x_3 = 0$ equivale a $x_3 = (a+2)x_2$ e dunque

$$\mathrm{Ker}T = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_3 = (a+2)x_2 \right\} = \left\{ \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ (a+2)x_2 \\ x_4 \end{vmatrix} : x_1, x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

e quindi

$$\mathrm{Ker}T = \mathrm{Span} \left(\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ a+2 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right).$$

Essendo questi tre vettori linearmente indipendenti (la verifica è immediata) si ottiene che essi formano una base per V, che indichiamo col simbolo $\mathbf{B}_V$: da ciò si ha subito $\dim(\mathrm{V}) = 3$.

Punto (ii). È ora richiesta una base ortonormale di V. L'ortogonalità è intesa rispetto al *prodotto scalare canonico* di $\mathbb{R}^4$. Non è difficile vedere che la relazione di ortogonalità tra i vettori della base $\mathbf{B}_V$ è già soddisfatta, per cui sarà sufficiente normalizzare. Ma il primo e il terzo vettore hanno già norma unitaria quindi in realtà l'unico vettore che necessita di normalizzazione rimane il secondo la cui norma vale $\sqrt{1+(a+2)^2}$.

Una base ortonormale di V è dunque:

$$\mathbf{B}_{V_{norm}} = \left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1+(a+2)^2}} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ a+2 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right\}.$$

Punto (iii). Posto $W = V^{\perp}$, si chiede di trovare la proiezione ortogonale P_W di $\mathbb{R}^4$ su W dove $W \subset \mathbb{R}^4$ è per definizione uno spazio vettoriale formato da quei vettori $w \in \mathbb{R}^4$ tali che $\langle w, v \rangle = 0$ per ogni $v \in V$. Come noto dalla teoria $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$. Si può immediatamente constatare che un qualsiasi vettore multiplo del vettore

$$w_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ a+2 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

risulta ortogonale a tutti i vettori della base $\mathbf{B}_V$, ragione per cui è possibile scrivere:

$$\mathbf{B}_W = \{w_1\}.$$

Posto allora $\tilde{w}_1 = w_1/||w_1||$ si ha che $\mathbf{B}'_W = \{\tilde{w}_1\}$ è una base ortonormale di W e quindi per quanto sappiamo dalla teoria otteniamo

$$P_W(x) = \langle x, \tilde{w}_1 \rangle \tilde{w}_1 = \frac{1}{||w_1||^2} \langle x, w_1 \rangle w_1 = \frac{1}{(a+2)^2+1} \left((a+2)x_2 - x_3\right) w_1.$$

Risulta pertanto che la matrice associata a P_W rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ è data da

$$A = \frac{1}{(a+2)^2+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a+2)^2 & -(a+2) & 0 \\ 0 & -(a+2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Punto (iv). Stavolta viene chiesto di trovare l'espressione della proiezione ortogonale P_V di $\mathbb{R}^4$ su V. Basta notare che $V = W^\perp$ e ricordare che dalla teoria si ha $P_V = P_{W^\perp} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4} - P_W$ per ottenere l'applicazione richiesta e di conseguenza la matrice ad essa associata.

Quesito C.

In questo esercizio si chiede di studiare l'esistenza delle soluzioni del seguente sistema lineare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + k\ x_3 - x_4 = a \\ x_2 + x_3 - x_4 = k \\ 3x_1 + 4x_2 = -2 \\ k\ x_2 - (a+1)x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

in cui a è un numero naturale fissato. Nel caso in cui le soluzioni esistano, se ne richiede il calcolo esplicito.

Siamo di fronte ad un sistema lineare in 4 equazioni e 4 incognite. Poiché qualora le soluzioni esistano è richiesto di esibire le soluzioni del sistema conviene procedere tramite riduzione a scala. A tale scopo scriviamo la matrice completa del sistema che risulta essere

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & -1 & k \\ 3 & 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & k & -a-1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Procedendo con la riduzione a scala si ottiene

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & -1 & k \\ 0 & 1 & -3k & 3 & -3a-2 \\ 0 & k & -a-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & k & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & -1 & k \\ 0 & 0 & -3k-1 & 4 & -3a-2-k \\ 0 & 0 & -a-1-k & 1+k & -k^2 \end{vmatrix}.$$

A questo punto conviene scambiare la terza e la quarta colonna (ricordando che in questo modo si scambiano la terza e la quarta variabile) per utilizzare il pivot 4 che è certamente non nullo. Moltiplicando per 4 l'ultima riga otteniamo allora la seguente riduzione a scala

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & k & a \\ 0 & 1 & -1 & 1 & k \\ 0 & 0 & 4 & -3k-1 & -3a-2-k \\ 0 & 0 & 1+k & -a-1-k & -k^2 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & k & a \\ 0 & 1 & -1 & 1 & k \\ 0 & 0 & 4 & -3k-1 & -3a-2-k \\ 0 & 0 & 0 & 3k^2-4a-3 & 2+3a+3k+3ak-3k^2 \end{vmatrix}.$$

Da ciò si deduce che per $k = \pm\sqrt{(4a+3)/3}$ il sistema non è compatibile (ricorda che a è un numero positivo fissato), mentre per $k \neq \pm\sqrt{(4a+3)/3}$ il sistema ammette una e una sola soluzione data da

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2(-1+2a^2-2k-2ak+3k^2)}{3+4a-3k^2}, \\ x_2 &= \frac{2a+3a^2-3k-3ak+3k^2}{-3-4a+3k^2}, \\ x_3 &= \frac{-2-3a-3k-3ak+3k^2}{3+4a-3k^2}, \\ x_4 &= \frac{-2-5a-3a^2-3k-4ak+3k^3}{3+4a-3k^2}. \end{aligned}$$

APPELLO DEL 22 APRILE 2002

SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

Domanda filtro 1. Se i vettori v_1, v_2, v_3 formano una base per lo spazio vettoriale V, i vettori $w_1 = v_2$,$w_2 = av_1 + v_3$ e $w_3 = av_1 + v_2 + v_3$ sono sempre generatori di V?

Procediamo come segue. Indichiamo con B l'insieme di vettori $\{v_1, v_2, v_3\}$. Per ipotesi tali vettori formano una base di V, per cui:

$$V = \text{Span}\,\{v_1, v_2, v_3\} \quad \text{e} \quad \dim(V) = 3.$$

Sono poi definiti i vettori: $w_1 = v_2$, $w_2 = av_1 + v_3$, $w_3 = av_1 + v_2 + v_3$. Nella base che abbiamo quindi fissato, le componenti dei vettori w_1, w_2, w_3 sono rispettivamente:

$$w_1 \xrightarrow{B} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \ w_2 \xrightarrow{B} \begin{vmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \ w_3 \xrightarrow{B} \begin{vmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

(ricordiamo a proposito che a è un *parametro* reale, cioè $a \in \mathbb{R}$).
Per rispondere al quesito dell'esercizio, dobbiamo verificare che la terna $\{w_1, w_2, w_3\}$ formi un insieme di generatori di V; in definitiva dobbiamo chiederci se risulti o meno valida l'uguaglianza:

$$V = \text{Span}\,(v_1, v_2, v_3) = \text{Span}\,(w_1, w_2, w_3) = W.$$

Ora sicuramente risulta $W \subseteq V$ (W è sottospazio di V), in quanto i vettori w_i sono ottenuti mediante combinazione lineare di vettori di V e V è spazio vettoriale (quindi *chiuso* per quanto riguarda le operazioni di *somma* e *prodotto per scalari*); in base a ció possiamo affermare che affinché sia vera anche l'uguaglianza $V = W$ è sufficiente che:

$$\dim(V) = \dim(W) = 3.$$

In definitiva, basterà verificare che i w_i siano *linearmente indipendenti.*

Sfruttiamo ora queste osservazioni per risolvere l'esercizio. Come si vede, i vettori w_1 e w_2 sono linearmente indipendenti , in quanto non sono multipli uno dell'altro (tra l'altro sono anche ortogonali secondo la *metrica standard* di $\mathbb{R}^3$). Rimane da vedere se w_3 sia o meno dipendente da w_1 e w_2; si evince immediatamente che risulta:

$$w_3 = w_1 + w_2,$$

per cui la terna $\{w_1, w_2, w_3\}$ é formata da vettori linearmente dipendenti e quindi **non** forma un insieme di generatori di V. Sarà perciò:

$$W = \text{Span}\,\{w_1, w_2, w_3\} = \text{Span}\,\{w_1, w_2\} \subset V = \mathbb{R}^3, \quad \dim(W) = 2 < 3 = \dim(V).$$

Si sarebbe potuti arrivare alla medesima conclusione usando un procedimento differente. Un altro metodo per valutare la *dipendenza lineare* della terna $\{w_1, w_2, w_3\}$ consiste infatti nello studiare il **determinante** della matrice costruita mediante le componenti di tali vettori in *una* base. Nel nostro caso, scegliamo come base in questione la base B, che abbiamo già avuto modo di definire.
Sia quindi:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Scegliamo di calcolare il determinante della matrice A avvalendoci della regola di *Laplace* (si noti che avremmo potuto applicare la regola di *Sarrus*, essendo la matrice di ordine uguale a 3, ma preferiamo dare enfasi a metodi che siano il più generali possibile).
Come si vede facilmente, la prima colonna di A contiene due termini nulli; conviene allora sviluppare i calcoli a partire proprio da tale colonna (ma **non** è strettamente necessario, in quanto il risultato dell'operazione **non dipende** dalla particolare riga o colonna scelta!). Si ottiene pertanto:

$$\det A = 0 \cdot (-1)^2 \cdot \det \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^3 \cdot \det \begin{vmatrix} a & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^4 \cdot \det \begin{vmatrix} a & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\det \begin{vmatrix} a & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a - a) = 0.$$

Concludiamo perciò che la terna data è linearmente dipendente qualsiasi sia il valore assunto dal parametro a.
Facciamo inoltre notare per completezza che un ulteriore modo per valutare la dipendenza (indipendenza) lineare consiste nell'applicare il *metodo di riduzione di Gauss.* Il lettore provi ad applicare tale metodo per esercizio.

Domanda filtro 2. Esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che il sistema lineare: $\begin{cases} x_1 + x_2 = a - 4 \\ 3x_1 - kx_2 = 9 \end{cases}$ sia incompatibile?

Si tratta di un sistema lineare in 2 equazioni ed in 2 incognite x_1, x_2. Al fine di risolvere l'esercizio, si potrebbe andare direttamente alla ricerca delle soluzioni e svolgere quindi un'analisi *quantitativa*: se le soluzioni effettivamente non esistessero, dovremmo trovare un'incongruenza tra le eguaglianze imposte dal sistema nel corso dell'analisi stessa.

Tuttavia, l'analisi più *coerente* alla domanda è chiaramente quella *qualitativa* (studio della sola esistenza della soluzione): così noi procederemo.

Per prima cosa scriviamo il sistema nella forma compatta: $Ax = b$ in cui:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -k \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} a-4 \\ 9 \end{vmatrix} \quad x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

A è la *matrice dei coefficienti*(anche detta *matrice incompleta*), b è il *vettore dei termini noti* ed x è il *vettore delle incognite.*

Per il teorema di *Rouché-Capelli* esiste soluzione se e soltanto se:

$$\text{rango(A)} = \text{rango(A|b)}$$

(ciò equivale a richiedere che il vettore b sia combinazione lineare dei vettori che costituiscono le colonne della matrice A).

Valutiamo il rango della matrice A; come si vede immediatamente le due colonne coincidono (e quindi sono anche *multiple* una dell'altra) se e solo se $k = -3$. In tutti gli *altri* casi ($k \neq 3$) le colonne sono *linearmente indipendenti.* Abbiamo quindi due casi distinti:

$$\begin{cases} \text{rango}(A) = 2 & \text{ovvero } k \neq -3 \\ \text{rango}(A) = 1 & \text{ovvero } k = -3. \end{cases}$$

Discutiamo separatamente le due diverse possibilità.

Caso 1: $k \neq -3$. In questo caso dette A^1 ed A^2 le colonne di A, si ha che:

$$\text{Span}\left(\ A^1, A^2\right) = \mathbb{R}^2,$$

per cui il sistema ammette sempre soluzione, qualsiasi sia il parametro a. Per completezza è anzi doveroso far notare che il sistema ammette soluzione qualsiasi sia il vettore b dei parametri noti.

Caso 2: $k = -3$. Stavolta $A^1 = A^2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix}$, per cui:

$$b \in \text{Span}\left(\ A^1, A^2\right) = \text{Span}\left(A^1\right) = \mathbb{R}\begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tale che } b = \alpha \cdot A^1 = \alpha \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix}.$$

Nel caso in esame dall'uguaglianza delle seconde componenti risulta $\alpha = \frac{1}{3}$; di conseguenza: $1 = (a-4)/3$ da cui ricaviamo $a = 7$.

In virtù di quanto visto nei due casi possiamo quindi affermare che il sistema ha sempre soluzione $\forall k \in \mathbb{R}$ solo se $a = 7$, mentre se $k \neq 3$ la soluzione esiste $\forall a \in \mathbb{R}$.

Domanda filtro 3. Può esistere una matrice $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ congruente alla matrice $B = \begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$ tale che $sp(L_A) = \{a+1, 2\}$?
Come si nota immediatamente, B è già in forma *triangolare superiore*, per cui gli autovalori giacciono sulla diagonale principale. Si ha quindi $sp(L_B) = \{0, 5\}$. Si noti che avremmo ottenuto lo stesso risultato scrivendo l'*equazione caratteristica*:

$$p_B(\lambda) = \det(\lambda I - B) = 0$$

e trovandone le soluzioni

$$\lambda^2 - tr(B)\lambda + det(B) = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 5\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda \cdot (\lambda - 5) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 5 \end{cases}$$

da cui ancora: $sp(L_B) = \{0, 5\}$ e quindi la matrice B non è invertibile.
Per ipotesi $sp(L_A) = \{a+1, 2\}$, per cui uno dei due autovalori della matrice A risulta fissato, mentre l'altro dipende dal parametro a, ma non è mai nullo, in quanto a è un numero naturale. La matrice A risulta pertanto invertibile.

In virtù di un risultato teorico non esiste dunque una matrice A che sia congruente a B e il cui spettro sia $\{a+1, 2\}$.

Quesito A. Prima di tutto facciamo alcune posizioni. Siano

$$u_1 = (a-2)e_1 + e_2 + e_4,\ u_2 = e_1 + e_2,\ u_3 = ae_1 + 3e_2 + e_4$$

$$v_1 = e_1 + (a+1)e_3,\ v_2 = 2e_1 + e_2 + (a+1)e_3,\ v_3 = 3e_1 + 2e_2 + (a+1)e_3.$$

Secondo quanto abbiamo appena posto sarà quindi:

$$U = \text{Span}\,(u_1, u_2, u_3) = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} a-2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right),$$

$$V = \text{Span}\,(v_1, v_2, v_3) = \text{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ a+1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ a+1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ a+1 \\ 0 \end{vmatrix} \right).$$

Punto (i). Come si vede subito, $\dim(U), \dim(V) \leq 3$, in quanto entrambi i sottospazi hanno tre soli generatori. Per verificare quale siano le effettive dimensioni, poniamo le componenti dei generatori di U e di V nelle matrici M_U ed M_V, rispettivamente. Otteniamo:

$$M_U = \begin{vmatrix} a-2 & 1 & a \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad M_V = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ a+1 & a+1 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

A questo punto, per valutare il rango delle matrici M_U ed M_V abbiamo vari metodi, ad esempio la *riduzione a scala*, il *teorema degli orlati* o gli *scarti successivi*. Per dare una maggiore varietà di tecniche utilizzeremo gli scarti successivi per trovare una base di U e la riduzione a scala per V.

È immediato verificare che u_1 non è nullo e che u_1 e u_2 non sono multipli l'uno dell'altro; poiché $u_3 = u_1 + 2u_2$ si ha che u_1 e u_2 formano una base di U e quindi $U = \mathrm{Span}\,(u_1, u_2)$ e $\dim(U) = 2$ (notiamo a questo proposito come il parametro a non influisca minimamente).

Vediamo cosa accade per il sottospazio V, studiando la relativa matrice M_V. Utilizzando operazioni elementari si ottiene che una riduzione a scala di M_V è data da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

pertanto $\dim(V) = 2$ e i vettori v_1 e v_2 costituiscono una base di V in quanto i pivot compaiono nelle prime due colonne.

L'esercizio procede chiedendo di calcolare $\dim(U \cap V)$ e $\dim(U + V)$; esaminiamo adesso la seconda delle due richieste. Poiché

$$U + V = \mathrm{Span}\,(u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Span}\,(u_1, u_2, v_1, v_2)$$

potremmo proseguire in maniera analoga ai casi precedenti, definendo una matrice M_{UV} che ha per colonne i vettori delle basi di U e V, e calcolarne a seguito il rango, riducendo ancora una volta a scala. Vogliamo però mostrare un ragionamento differente. A tal proposito osserviamo subito che v_1 è indipendente da u_1, u_2; infatti, ogni combinazione lineare di u_1 e u_2 ha sempre la terza componente nulla, mentre la terza componente di v_1 è uguale a $a + 1 \leq 1$ in quanto a è non negativo. Possiamo per ora quindi dire che sicuramente:

$$3 \leq \dim(U + V) \leq 4 = \dim(\mathbb{R}^4).$$

Rimane da vedere se il vettore v_2 sia o meno dipendente dagli altri 3. Un modo potrebbe essere quello di impostare l'equazione vettoriale $v_2 = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma v_1$ e vedere se essa ammette soluzione non identicamente nulla nelle incognite $\{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Un altro metodo consiste invece nel calcolare il determinante della matrice M_{UV}. A quel punto si avranno due casi distinti: $\det(M_{UV}) \neq 0$ allora il rango di A è uguale a 4, altrimenti è strettamente minore di 4.

Calcoliamo quindi il determinante della matrice in questione:

$$\det(M_{UV}) = \det \begin{vmatrix} a-2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & a+1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & a+1 & a+1 \end{vmatrix} = 0 \ \forall a \in \mathbb{R}.$$

Siamo quindi nel secondo caso, per cui $\mathrm{rango}(M_{UV}) < 4$; ma per quanto detto in precedenza è anche $\mathrm{rango}(M_{UV}) \geq 3$, da cui necessariamente $\mathrm{rango}(M_{UV}) = 3$. Abbiamo perciò la risposta che cercavamo:

$$\dim(U + V) = 3.$$

Rimane da calcolare $\dim(U \cap V)$. **Non** essendo richiesta una base di $(U \cap V)$, sarà sufficiente applicare la *formula di Grassmann* sfruttando quanto finora ottenuto. In base ad essa si ha:

$$\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V) \Longrightarrow \dim(U \cap V) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

Si conclude così il primo punto del quesito.
Punto (ii). Si chiede di esibire una base di V ortonormale rispetto al prodotto scalare canonico. Possediamo già una base del sottospazio V: la coppia di vettori v_1, v_2. Dobbiamo ora passare da questa base ad una nuova base $B_{ort} = \{w_1, w_2\}$, quest'ultima costituita da vettori ortogonali fra loro. Fissiamo allora il vettore v_1, visto che da qualche parte bisogna iniziare (il concetto di ortogonalità è un concetto *relativo*, che coinvolge cioè *due* vettori), ponendo $w_1 = v_1$. Definiamo poi: $w_2 = v_2 + \alpha w_1$ dove α è un numero reale che specificheremo in seguito proprio imponendo che w_1 e w_2 siano ortogonali.

Poiché w_1 e w_2 devono essere ortogonali, il parametro α dovrà essere tale da verificare $\langle w_1, w_2 \rangle = 0$. In virtù della bilinearità, vale la seguente catena di uguaglianze:

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \langle w_1, v_2 + \alpha w_1 \rangle = \langle w_1, v_2 \rangle + \langle w_1, \alpha \cdot w_1 \rangle \rangle = \langle w_1, v_2 \rangle + \alpha \cdot \langle w_1, w_1 \rangle = 0,$$

da cui si ottiene:

$$\alpha = -\frac{\langle w_1, v_2 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}.$$

Passando ai valori numerici dell'esercizio, si ricava l'incognita α che risulta essere

$$\alpha = -\frac{2 + (a+1)^2}{1 + (a+1)^2} \ ,$$

che è il valore da inserire all'interno dell'espressione posta inizialmente $w_2 = v_2 + \alpha w_1$.

Avendo trovato l'espressione analitica per w_1 e w_2 non resta che normalizzare, arrivando infine alla base ortonormale cercata, che indichiamo con il simbolo B'_{ort}. Nella fattispecie:

$$B'_{ort} = \left\{ w_1 \cdot \frac{1}{||w_1||}, w_2 \cdot \frac{1}{||w_2||} \right\} = \{w'_1, w'_2\},$$

dove

$$\|w_1\| = \sqrt{1 + (a+1)^2}, \quad \|w_2\| = \sqrt{\langle w_2, w_2 \rangle} = \sqrt{\langle v_2 + \alpha w_1, v_2 + \alpha w_1 \rangle}.$$

Punto (iii). Si richiede di completare la base ortonormale di V appena trovata al punto precedente ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$. Bisognerà quindi trovare altri due versori $w'_3, w'_4 \in \mathbb{R}^4$ che siano in relazione di ortogonalità con i precedenti w'_1, w'_2 e contemporaneamente ortogonali fra loro.

Da tutto ciò scaturisce la seguente serie di vincoli:

$$\langle w'_3, w'_1 \rangle = 0, \ \langle w'_3, w'_2 \rangle = 0, \ \langle w'_4, w'_1 \rangle = 0, \ \langle w'_4, w'_2 \rangle = 0, \ \langle w'_3, w'_4 \rangle = 0.$$

Qualunque metodo ci consenta di trovare dei versori $w'_3, w'_4 \in \mathbb{R}^4$ che rispettino i vincoli suddetti sarà a questo punto valido. Facciamo notare che, come al solito, conviene cercare in primo luogo dei vettori che siano *ortogonali* e solo in seguito imporre su ogni vettore trovato la condizione di *modulo unitario (norma unitaria).* Possiamo quindi focalizzare la nostra attenzione sulla ricerca di due vettori w_3, w_4 non necessariamente di norma unitaria, che siano ortogonali a w_1 e w_2 e ortogonali fra loro:

$$\langle w_3, w_1\rangle = 0,\ \langle w_3, w_2\rangle = 0,\ \langle w_4, w_1\rangle = 0,\ \langle w_4, w_2\rangle = 0,\ \langle w_3, w_4\rangle = 0.$$

(come risulta evidente, il problema è formalmente identico al precedente, ma il carico computazionale minore in quanto esistono dei vincoli in meno: quelli del tipo $||w_i|| = 1$).

A questo punto il problema può essere risolto scrivendo un vettore **generico** $w \in \mathbb{R}^4$, in forma parametrica

$$w = \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{vmatrix}.$$

Imponendo $\langle w, w_1\rangle = 0$ e $\langle w, w_2\rangle = 0$ si ottiene un sistema lineare omogeneo in 2 equazioni e 4 incognite. Tra le $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni soluzioni si potrà scegliere il vettore w_3 e poi cercare il vettore w_4 nella stessa maniera. Tuttavia tale metodo risulta estremamente gravoso dal punto di vista calcolativo e anche l'utilizzo dell'ortogonalizzazione di Graham-Schmidt non è da meno.

Nel nostro caso particolare, una ispezione diretta mostra come i vettori w_1 e w_2 abbiano entrambi l'ultima componente nulla e quindi il vettore e_4 risulti ortogonale a tutti e due. Ponendo quindi $w_3 = e_4$ non ci resta che da trovare il quarto vettore w_4. Ma poiché esso deve essere ortogonale a w_3 la sua quarta componente sarà necessariamente nulla e quindi $w_4 = (l, m, n, 0)^T$ dove l, m, n sono opportuni numeri reali. A questo punto l'ortogonalità di w_4 a w_1 e w_2 si riduce all'ortogonalità dei vettori costituiti dalle prime tre componenti e quindi $(l, m, n)^T$ può essere ricavato come prodotto vettore di $(1, 0, a+1)^T$ e $(2, 1, a+1)^T$. Risulta quindi

$$w_4 = \begin{vmatrix} 1 \\ -(a+1) \\ -(a+1) \\ 0 \end{vmatrix};$$

normalizzando i vettori trovati si ottiene la base cercata

$$B'_{ort} = \left\{ \frac{w_1}{||w_1||}, \frac{w_2}{||w_2||}, \frac{w_3}{||w_3||}, \frac{w_4}{||w_4||} \right\}.$$

Quesito B. Si tratta di un esercizio in cui viene in aiuto una buona conoscenza teorica. Per ipotesi $u \in \mathbb{R}^n$ è un versore (vettore di *modulo unitario*, o, parimenti detto, di *norma unitaria*) secondo il *prodotto scalare standard* o *prodotto scalare euclideo* ovvero $||u|| = \sqrt{\langle u,\ u\rangle} = \sqrt{u^T u} = 1$. Per chiarire meglio come sia fatta la matrice A la scriviamo esplicitamente (anche se ciò non sarà necessario per lo svolgimento dell'esercizio).

Indicato $u \in \mathbb{R}^n$ in termini delle sue componenti:

$$u = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{vmatrix},$$

la matrice A sarà data da

$$A = \begin{vmatrix} 1-u_1^2 & -u_1u_2 & \dots & -u_1u_n \\ -u_2u_1 & 1-u_2^2 & \dots & -u_2u_n \\ \vdots & & \ddots & \\ -u_nu_1 & \dots & \dots & 1-u_n^2 \end{vmatrix}.$$

Punto (i). Verificare che A è simmetrica, significa dimostrare che $A = A^T$. È sufficiente a tal proposito scrivere l'espressione di A^T a partire da quella della matrice A

$$A^T = \left(I - uu^T\right)^T = I_n^T - \left(uu^T\right)^T = I_n - \left(u^T\right)^T u^T = I_n - uu^T = A.$$

Nel dimostrare i passaggi appena svolti si sono sfruttate le proprietà della *trasposizione* e *della somma e prodotto fra matrici.*

Punto (ii). Ricordiamo che un vettore non nullo $v \in V$ si dice *autovettore* relativo all'*autovalore* $\lambda \in \mathbb{R}$ per l'applicazione lineare $T \in End(V)$ se $T(v) = \lambda v$. Ciò significa che il *trasformato* di v secondo l'applicazione lineare T risulta multiplo di se stesso.

Il calcolo degli autovettori si riduce perciò allo studio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo (il termine noto b è infatti in questo caso il vettore nullo), le cui incognite, in numero pari ad n, coincidono con le componenti del vettore stesso. Si noti che il sistema ammette sempre almeno ∞^1 soluzioni. Non può infatti essere altrimenti, in quanto essendo un sistema lineare omogeneo, esso ammette per lo meno la soluzione banale $v = 0$; tale eventualità era già stata esclusa all'inizio della formulazione del problema.

Possiamo in primo luogo affermare che essendo A simmetrica, essa risulta sicuramente diagonalizzabile in virtù del *teorema spettrale.* Lo stesso teorema ci assicura dell'esistenza di una base di autovettori ortonormale.

Notiamo poi che $Au = \left(I - uu^T\right) u = u - (uu^T)u = u - u(u^Tu) = u - u = 0$ in quanto il vettore u ha norma unitaria; pertanto u è un autovettore di A relativo all'autovalore 0.

Se $v \in \mathbb{R}^n$ è ortogonale a u si ha $Av = \left(I - uu^T\right) v = v - (uu^T)v = u - u(u^Tv) = v - 0 = v$ e quindi il sottospazio $\mathbb{R}u^\perp$ è contenuto nell'autospazio relativo all'autovalore 1.

La molteplicità geometrica di tale autovalore è dunque almeno $n-1$; avendo già trovato un altro autovalore ne segue che la somma delle molteplicità geometriche vale almeno n e quindi è necessariamente uguale a n. Allora l'autospazio relativo all'autovalore 0 è proprio $\mathbb{R}u$, quello relativo all'autovalore 1 è proprio $\mathbb{R}u^\perp$ e non esistono altri autovalori di A.

Punto (iii). La matrice A è certamente non invertibile perché $Au = 0$ e u è un vettore non nullo.

Quesito C.

Punto (i). Sono richieste equazioni *parametriche* e *cartesiane* per la retta r_1, passante per i punti $P_1 = (1, a+1, 0)$ e $P_2 = (2, 0, 2)$ e per la retta r_2, parallela al vettore $v_2 = (-1, 2, 0)$ e passante per il punto $P_3 = (2, 3, a-4)$.

Equazioni parametriche per r_1 si trovano facilmente ricordando che il vettore $\overline{P_1P_2}$ è ad essa parallelo e quindi un vettore direttore v_1 per r_1 ha coordinate $P_1 - P_2 = (1, a+1, 0) - (2, 0, 2) = (-1, a+1, -2)$. Il punto di passaggio, può essere un qualsiasi punto della retta in particolare scegliendo P_2 otteniamo $x = 2 - t$, $y = (a+1)t$, $z = 2 - 2t$.

Per quanto concerne poi r_2, è già noto un suo vettore direttore $v_2 = (-1, 1, 0)$ e viene fornito il punto di passaggio $P_3 = (2, 3, a-4)$. Equazioni parametriche per tale retta sono quindi date da $x = -t+2$, $y = t+3$, $z = a-4$.

Adesso, per ricavare le equazioni *cartesiane* da quelle parametriche basta ricavare il parametro t da una delle equazioni e sostituirlo nelle altre o utilizzare il teorema degli orlati per ottenere per r_1 le equazioni cartesiane $(a+1)xy - 2(a+1) = 0$ $y + (a+1)z - 2(a+1) = 0$ e per r_2 le equazioni $x + y - 5 = 0$, $z - a + 4 = 0$.

Punto (ii). Viene chiesto di trovare il piano π contenente r_2 e parallelo a r_1. Conviene ragionare nel modo che segue. Se π deve contenere r_2, vuol dire che esso appartiene al *fascio proprio di piani* che ha come *asse* la retta r_2 stessa. I piani di tale fascio possono essere rappresentati in forma cartesiana combinando linearmente le equazioni dei due piani che, intersecandosi, danno origine alla retta r_2. Il generico piano di tale fascio avrà equazione cartesiana

$$\mu \cdot (x + y - 5) + \nu \cdot (z - a + 4) = 0,$$

ovvero riordinando i termini

$$\mu x + \mu y + \nu z + (\nu (a + 4) - 5\mu) = 0.$$

Rimane adesso da imporre la condizione di parallelismo tra i piani del fascio e la retta r_1. Un piano è parallelo alla retta r_1 se e soltanto se è parallelo al vettore direttore v_1 di r_1. Il vincolo di parallelismo può essere imposto anche in via indiretta, realizzando la condizione di *ortogonalità* tra il *vettore normale* al piano ed il vettore direttore di r_1. Ricordiamo che **un** vettore n normale al piano è immediatamente ottenibile a partire dai *coefficienti* che si trovano nell'equazione cartesiana del piano stesso. Pertanto il piano cercato deve soddisfare $\mu \cdot (-1) + \mu \cdot (a+1) + \nu \cdot (-2) = 0$ da cui $2\nu = a\mu$. Scegliendo $\mu = 2$ e $\nu = a$ e sostituendo nell'equazione del piano troviamo l'espressione cercata del piano π

$$\pi : 2x + 2y + az + a^2 + 4a - 10 = 0.$$

Punto (iii). Il punto chiede di dare le equazioni parametriche e cartesiane per la retta r contenuta in π, ortogonale ad r_1 e passante per il punto $Q = (-\sqrt{2}, 1, 2)$. Poiché tale retta deve essere contenuta in π e deve contenere il punto Q, tale punto deve giacere sul piano π. Tuttavia $2 \cdot (-\sqrt{2}) + 2 \cdot (1) + a \cdot 2 + a^2 + 4a - 10 \neq 0$ (perché a è un numero intero) ne deduciamo che tale retta non esiste.

Punto (iv). Viene chiesto di orientare a piacere le rette r_1 ed r e di calcolare il coseno dell'angolo tra esse compreso. Possiamo scegliere le orientazioni indotte su r_1 ed r_2 dai vettori v_1 e v_2 rispettivamente e otteniamo

$$cos(\widetilde{r_1 r_2}) = \frac{(-1)\cdot(-1) + (a+1)\cdot 1 + (-2)\cdot 0}{\sqrt{1 + (a+1)^2 + 4}\sqrt{1+1}} = \frac{a+2}{\sqrt{a^2+2a+6}\sqrt{2}}.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Marco Abate, *Geometria*, McGraw-Hill.
[2] Marco Abate, Chiara de Fabritiis, *Esercizi di Geometria*, McGraw-Hill.