Durante il corso abbiamo studiato insiemi (rette e piani) che possono essere descritti come luogo di zeri di equazioni (o sistemi) di primo grado. Adesso vedremo come applicare quanto visto per studiare i luoghi di zeri di polinomi di secondo grado in due o tre variabili. Quanto verrà esposto in esposto queste dispense è una trattazione *naïf* della teoria delle coniche in $\mathbb{R}^2$ e delle quadriche in $\mathbb{R}^3$ e non sempre i risultati presentati sono corredati di dimostrazione (per le quali si può sempre consultare utilmente il testo consigliato per il corso).

1.1. Introduzione alle coniche e alle quadriche

Definizione 0.1 Indichiamo con $\mathbb{R}_2[x_1, \ldots, x_n]$ l'insieme dei polinomi a coefficienti reali in n variabili di grado minore o uguale a 2. Sia $p \in \mathbb{R}_2[x_1, \ldots, x_n]$ un polinomio di secondo grado. La *quadrica* $\mathcal{Q}_p$ di *equazione* p è il luogo dei punti di $\mathbb{R}^n$ le cui coordinate soddisfano l'equazione $p(x_1, \ldots, x_n) = 0$. In altri termini,

$$\mathcal{Q}_p = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid p(x_1, \ldots, x_n) = 0\}.$$

Noi ci occuperemo *esclusivamente* dei casi $n = 2$ e $n = 3$. Se $n = 2$, la quadrica $\mathcal{Q}_p$ sarà detta *conica* di equazione p, e indicata con $\mathcal{C}_p$.

Esempio 0.1 *Se $p(x, y) = x^2 + y^2 - 2x = (x - 1)^2 + y^2 - 1$, la conica $\mathcal{C}_p$ è la circonferenza di centro $(1, 0)$ e raggio 1. Se invece $p(x, y) = y^2 + 2x$, la conica $\mathcal{C}_p$ è la parabola di equazione $x = -y^2/2$.*

Osservazione 0.1 Le coniche si chiamano in questo modo perché si possono ottenere intersecando un cono con un piano; vedi il Capitolo 13 del testo consigliato.

Il nostro obiettivo è classificare le coniche di $\mathbb{R}^2$ e le quadriche di $\mathbb{R}^3$. Per far ciò dobbiamo decidere quando due polinomi di secondo grado p e q determinano la stessa quadrica. Vi è una situazione ovvia in cui questo accade: se esiste un $\sigma \neq 0$ tale che $q = \sigma p$, è evidente che $\mathcal{Q}_q$ e $\mathcal{Q}_p$ sono proprio lo stesso insieme.

Ma questo non è l'unico caso. Una quadrica è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, con una sua forma e un suo aspetto geometrico indipendente da dove si trova in quel momento — ovvero indipendente dal sistema di coordinate scelto. In altri termini, se cambiamo coordinate l'equazione che descrive la quadrica può mutare, ma la quadrica come insieme rimane essenzialmente la stessa. Dunque se due polinomi sono ottenuti l'uno dall'altro tramite un cambiamento di coordinate allora descrivono essenzialmente la stessa quadrica. E questo accade anche se fra i cambiamenti di coordinate ammettiamo le traslazioni.

Definizione 0.2 Un *cambiamento affine di coordinate* in $\mathbb{R}^n$ è un cambiamento di coordinate del tipo

$$x = Bx' + c, \tag{0.1}$$

con $B \in GL_n(\mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}^n$. Un *cambiamento metrico di coordinate* in $\mathbb{R}^n$ è un cambiamento affine di coordinate dove B è una matrice ortogonale.

Definizione 0.3 Due polinomi $p, q \in \mathbb{R}_2[x_1, \dots, x_n]$ sono *affinemente equivalenti* se esistono $\sigma \in \mathbb{R}^*$, $B \in GL_n(\mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}^n$ tali che

$$q(x') = \sigma p(Bx' + c) = \sigma p(x),$$

e in tal caso $p(x) = \sigma^{-1} q(B^{-1}x - B^{-1}c)$. Se inoltre $B \in O(n)$ è ortogonale, diremo che p e q sono *metricamente equivalenti.* Se p e q sono affinemente (metricamente) equivalenti, diremo anche che le quadriche $\mathcal{Q}_p$ e $\mathcal{Q}_q$ sono *affinemente (metricamente) equivalenti.*

In altri termini, due quadriche sono affinemente (metricamente) equivalenti se esiste un cambiamento affine (metrico) di coordinate che porta l'equazione della prima in un multiplo dell'equazione della seconda.

Osservazione 0.2 Due quadriche metricamente equivalenti sono anche affinemente equivalenti; il viceversa non è vero (per esempio, un'ellisse di equazione $x^2+2y^2-1=0$ è affinemente ma non metricamente equivalente alla circonferenza $x^2+y^2-1=0$).

Osservazione 0.3 La fondamentale differenza fra l'equivalenza metrica e quella affine è la seguente: due quadriche metricamente equivalenti sono a tutti gli effetti lo stesso insieme disegnato in posti diversi di $\mathbb{R}^n$, mentre due quadriche affinemente equivalenti hanno soltanto la stessa "forma". Infatti, l'equivalenza metrica conserva tutte le proprietà metriche (distanze fra punti, angoli, eccetera), mentre l'equivalenza affine conserva solo le proprietà affini (appartenenza, limitatezza, numero di pezzi, allineamenti, eccetera). Per esempio, due circonferenze di raggio diverso (o due ellissi, se è per questo) sono affinemente equivalenti (hanno essenzialmente la stessa forma) ma non sono metricamente equivalenti (hanno raggi diversi).

Osservazione 0.4 La nostra definizione privilegia l'equivalenza *algebrica* delle equazioni sull'equivalenza *geometrica* degli insiemi: se esiste (a sistema di coordinate fissato) un'isometria (o un'affinità) che porta la quadrica $\mathcal{Q}_p$ nella quadrica $\mathcal{Q}_q$ allora le due quadriche sono metricamente (o affinemente) equivalenti; il viceversa, in alcuni casi degeneri, non è vero. Il problema è che siccome siamo sui numeri reali l'equazione $p(x_1, \dots, x_n) = 0$ potrebbe non avere soluzioni. Per esempio, vedremo che le coniche di equazione $x^2+y^2+1=0$ e $x^2+1=0$ *non* sono neppure affinemente equivalenti, anche se entrambe descrivono l'insieme vuoto (cioè nessun $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ soddisfa tali equazioni).

Osservazione 0.5 Se le precedenti Osservazioni ti risultano oscure, conviene rileggerle dopo aver finito di studiare questo capitolo; a quel punto saranno molto più chiare.

Il nostro obiettivo è classificare le coniche e le quadriche di $\mathbb{R}^3$ (soprattutto dal punto di vista affine): dunque vogliamo associare ai polinomi di secondo grado degli invarianti, e poi trovare una breve lista di quadriche in forma canonica, a cui tutte le altre siano equivalenti.

A questo scopo ci sarà utile il seguente:

Teorema 0.4 (Cartesio) *Sia $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_d t^d$ un polinomio di grado n a coefficienti reali, con $0 \leq d \leq n$ e $a_d \neq 0$. Supponiamo che tutte le radici di p siano reali. Allora:*

(i) *0 è radice di p se e solo se $d \geq 1$, e in tal caso è una radice di molteplicità esattamente d;*
(ii) *p ha tante radici positive, contate con la relativa molteplicità, quante sono le variazioni di segno nella successione dei coefficienti non nulli di p.*

Osservazione 0.6 Il numero delle radici negative del polinomio p *non* è il numero delle non-variazioni (o permanenze) di segno nella successione dei coefficienti non nulli di p. Il numero delle radici negative lo si trova sottraendo al grado del polinomio il numero delle radici positive o nulle.

Se A è una matrice simmetrica sappiamo già che il suo polinomio caratteristico ha tutte le radici reali; quindi il criterio di Cartesio è ideale per studiare efficacemente il segno degli autovalori delle matrici simmetriche.

1.2. Coniche

Per dare un'idea degli insiemi di cui stiamo parlando, elenchiamo subito quelle che risulteranno essere le forme canoniche affini delle coniche in $\mathbb{R}^2$.

Esempio 0.2 *Le coniche tipo, a cui cercheremo di ricondurre tutte le altre, sono:*

(a) *l'ellisse reale, di equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$;*
(b) *l'iperbole, di equazione $x^2 - y^2 - 1 = 0$;*
(c) *la parabola, di equazione $x^2 - y = 0$;*
(d) *l'ellisse immaginaria, di equazione $x^2 + y^2 + 1 = 0$;*
(e) *le rette reali incidenti, di equazione $x^2 - y^2 = 0$;*
(f) *le rette complesse incidenti, di equazione $x^2 + y^2 = 0$;*
(g) *le rette reali parallele, di equazione $x^2 - 1 = 0$;*
(h) *le rette complesse parallele, di equazione $x^2 + 1 = 0$;*
(i) *le rette coincidenti, di equazione $x^2 = 0$.*

Come vedremo, le coniche di tipo (a)–(d) sono non degeneri, e le altre degeneri. L'ellisse immaginaria e le rette complesse parallele descrivono in realtà entrambe l'insieme vuoto; le rette complesse incidenti sono un punto, e le rette coincidenti sono l'asse y "contato due volte".

Osservazione 0.7 Il motivo per cui abbiamo chiamato "ellisse reale" la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$ è che, come vedremo, tutte le ellissi sono affinemente (ma non metricamente) equivalenti a essa.

Osservazione 0.8 Le "rette complesse incidenti" (la conica di equazione $x^2+y^2 = 0$) hanno questo nome perché il polinomio x^2+y^2 si spezza nel prodotto $(x+iy)(x-iy)$ di due fattori lineari a coefficienti complessi, come il polinomio definente le "rette reali incidenti" si spezza nel prodotto di due fattori lineari a coefficienti reali. Il motivo del nome "rette complesse parallele" per la conica di equazione $x^2 + 1 = 0$ è analogo.

Un generico polinomio $p \in \mathbb{R}_2[x_1, 2]$ di secondo grado in 2 variabili è della forma

$$p(x_1, x_2) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{j=1}^{2} a_{j,3} x_j + a_{3,3}. \tag{0.2}$$

Possiamo scrivere p in una maniera più semplice. Al polinomio p (e quindi alla conica $\mathcal{Q}_p$) possiamo associare la matrice simmetrica

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R}),$$

e la sua sottomatrice

$$\mathcal{A}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}).$$

Queste matrici hanno una relazione molto stretta con p; infatti si ha (esercizio):

$$p(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} x_1 \; x_2 \; 1 \end{vmatrix} A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{vmatrix},$$

o anche

$$p(x) = \tilde{x}^T A \tilde{x}, \tag{0.3}$$

dove useremo sempre la convenzione che se $x \in \mathbb{R}^2$ allora $\tilde{x} \in \mathbb{R}^3$ è ottenuto da x aggiungendo 1 come ultima coordinata:

$$x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{x} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Inoltre, se indichiamo con

$$p^{(2)}(x_1, x_2) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} x_i x_j$$

la *parte quadratica* di p, abbiamo anche che

$$p^{(2)}(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} x_1 \; x_2 \end{vmatrix} \mathcal{A}_2 \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}.$$

Definizione 0.5 La matrice A è detta *associata* alla conica $\mathcal{Q}_p$ (o al polinomio p). Diremo che la quadrica è *degenere* se $\det A = 0$, e *non degenere* altrimenti.

Osservazione 0.9 La matrice A è l'*unica* matrice simmetrica per cui vale (0.3), e quindi grazie alla quale possiamo studiare le quadriche con le tecniche viste per le matrici simmetriche. È per questo motivo che associamo al polinomio p proprio la matrice A e non un'altra.

Indicata con $p^{(2)}$ la parte quadratica del polinomio p, poniamo $b = \begin{vmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha = a_{33}$ in modo da scrivere la matrice A nella forma

$$A = \begin{vmatrix} \mathcal{A}_2 & b \\ b^T & \alpha \end{vmatrix},$$

e il polinomio p nella forma

$$p(x) = x^T \mathcal{A}_2 x + 2b^T x + \alpha.$$

Cerchiamo di "semplificare" la forma della matrice A tramite un cambiamento ortogonale di coordinate. Poiché $\mathcal{A}_2$ è una matrice simmetrica possiamo trovare B una matrice ortogonale B tale che $B^T \mathcal{A}_2 B$ sia in forma diagonale; questo vuol dire che nelle nuove coordinate x' per le quali $x = Bx'$ la parte di grado 2 del polinomio $p(x')$ non contiene più il termine misto $x'_1 x'_2$.

Successivamente possiamo cercare di eliminare il termine di grado 1, ovvero di risolvere il sistema lineare $\mathcal{A}_2 x = -b$ il che ci consentirebbe con una traslazione di scrivere il polinomio associato alla conica eliminando il termine di grado 1. Se il sistema citato è risolubile diremo che la conica è a centro, altrimenti che è un paraboloide. Senza dimostrazione diamo il seguente criterio

Lemma 0.6 *Sia $p \in \mathbb{R}_2[x_1, x_2]$ un polinomio di secondo grado di matrice associata $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$. Allora:*

(i) $\mathrm{rg}(\mathcal{A}_2) \le \mathrm{rg}(A) \le \mathrm{rg}(\mathcal{A}_2) + 2$;

(ii) *il sistema $\mathcal{A}_2 x = -b$ ammette soluzione se e solo se* $\mathrm{rg}(A) \le \mathrm{rg}(\mathcal{A}_2) + 1$.

(iii) *se $q \in \mathbb{R}_2[x_1, x_2]$ è un polinomio affinemente equivalente a p di matrice associata $A' \in M_{3,3}(\mathbb{R})$, allora il sistema $\mathcal{A}_2 x = -b$ ammette soluzione se e solo se il sistema $\mathcal{A}'_2 x' = -b'$ ammette soluzione.*

Nota che se $\mathrm{rg}(\mathcal{A}_2) = 2$ cioè se $\mathcal{A}_2$ è invertibile, allora la conica è sicuramente a centro; infatti essendo $\mathcal{A}_2$ invertibile il sistema $\mathcal{A}_2 = -b$ è certamente risolubile. Inoltre in tal caso il centro è unico perché il sistema $\mathcal{A}_2 = -b$ ammette una sola soluzione, proprio perché $\mathcal{A}_2$ è invertibile.

Se la conica è a centro e ci interessa la forma canonica metrica non ci resta che trovare quanto valga il termine noto; se invece siamo interessati alla forma canonica affine possiamo con un cambiamento lineare ma non *metrico* di coordinate ridurci al caso in cui i coefficienti di x_1^2 e x_2^2 sono 1, -1 oppure 0. L'ultima cosa che ci resta da decidere è se quale sia il segno del termine noto, il che può essere fatto andando a vedere quali sono i segni degli autovalori di A tramite il criterio di Cartesio.

In realtà molto spesso questo non è necessario: se infatti $\mathcal{A}_2$ **è invertibile** allora per determinare se dobbiamo mettere 1, -1 oppure 0 come termine noto nella forma canonica affine basta calcolare il determinante di A e confrontare questo con il segno del determinante di $\mathcal{A}_2$. Infatti le trasformazioni affini non inducono un cambiamento del segno del determinante della matrice associata alla conica. Pertanto se il determinante di A ènullo il termine noto dovrà essere uguale a 0, se il determinante di $\mathcal{A}_2$ e quello di A sono concordi dovrà essere uguale a 1 e se il determinante di $\mathcal{A}_2$ e quello di A sono discordi dovrà essere uguale a -1. Attenzione: come detto sopra, questo criterio "semplificato" funziona solo se $\mathcal{A}_2$ è invertibile, cioè se $\det\mathcal{A}_2$ è diverso da 0.

Se la conica è un paraboloide a meno di una traslazione sulla prima variabile possiamo eliminare la parte di primo grado in x_1 e "riassorbire" il termine noto in x_2 con una traslazione, quindi l'unica forma canonica affine possibile è $x_1^2 - x_2 = 0$.

Osservazione 0.10 In pratica, per trovare la forma canonica affine di una conica $\mathcal{Q}_p$ si procede in questo modo. Prima di tutto si scrive la matrice simmetrica A associata al polinomio p. Utilizzando il Criterio di Cartesio si trovano il numero i_+ di autovalori positivi e il numero i_- di autovalori negativi di $\mathcal{A}_2$. Allora la parte quadratica della forma canonica affine di p sarà data dalla somma di i_+ quadrati col segno positivo e i_- quadrati col segno negativo. Poi si confronta $r = i_+ + i_-$ col rango di A: se sono uguali la conica è a centro e non ha termine noto quindi la forma canonica coincide con la parte di secondo grado; se differiscono di 2, la conica è una parabola. Infine, se $\mathrm{rg}(A) = r + 1$, si calcola il numero di autovalori positivi e negativi di$A$ e la si confronta con $s = i_+ - i_-$, per stabilire se si è nel caso in cui il termine noto è uguale a 1 o nel caso in cui è uguale a -1. In realtà, come osservato in precedenza, se $\mathcal{A}_2$ è invertibile allora basta calcolare il segno del determinante di A per vedere se bisogna aggiungere 1 o -1.

Dunque per trovare la forma canonica affine di una conica di matrice associata A basta calcolare $\mathrm{rg}(A)$, $\mathrm{rg}(\mathcal{A}_2)$, i_+ e i_- e il segno del determinante di A oppure ove necessario il numero di autovalori positivi e negativi di A e andarsi a leggere nello schema precedente la forma canonica affine corrispondente. Usando il Criterio di Cartesio questo è quindi un problema completamente risolto.

1.3. Quadriche in $\mathbb{R}^3$

Esempio 0.3 *La lista delle quadriche tipo in $\mathbb{R}^3$ è ben più lunga. Si tratta di:*

(a) *l'ellissoide reale, di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$;*
(b) *l'ellissoide immaginario, di equazione $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$;*
(c) *l'iperboloide ellittico, di equazione $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$;*
(d) *l'iperboloide iperbolico, di equazione $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$;*
(e) *il paraboloide ellittico, di equazione $x^2 + y^2 - z = 0$;*
(f) *il paraboloide iperbolico, di equazione $x^2 - y^2 - z = 0$;*
(g) *il cono immaginario, di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 0$;*
(h) *il cono reale, di equazione $x^2 + y^2 - z^2 = 0$;*
(i) *il cilindro immaginario, di equazione $x^2 + y^2 + 1 = 0$;*
(j) *il cilindro ellittico, di equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$;*
(k) *il cilindro parabolico, di equazione $x^2 - y = 0$;*
(l) *il cilindro iperbolico, di equazione $x^2 - y^2 - 1 = 0$;*
(m) *i piani complessi incidenti, di equazione $x^2 + y^2 = 0$;*
(n) *i piani reali incidenti, di equazione $x^2 - y^2 = 0$;*
(o) *i piani complessi paralleli, di equazione $x^2 + 1 = 0$;*
(p) *i piani reali paralleli, di equazione $x^2 - 1 = 0$;*
(q) *i piani coincidenti di equazione $x^2 = 0$.*

Come già osservato nel caso delle coniche insiemi uguali (ad esempio quello vuoto) possono essere descritti da polinomi non equivalenti.

Un generico polinomio $p \in \mathbb{R}_2[x_1, x_2, x_3]$ di secondo grado in 3 variabili è della forma

$$p(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{j=1}^{3} a_{j,4} x_j + a_{44}. \tag{0.4}$$

Come nel caso delle coniche possiamo scrivere p in una maniera più semplice. Al polinomio p (e quindi alla quadrica $\mathcal{Q}_p$) possiamo associare la matrice simmetrica

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{14} & \cdots & a_{44} \end{vmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R}),$$

e la sua sottomatrice

$$\mathcal{A}_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{13} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{13} & \cdots & a_{33} \end{vmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R}).$$

Queste matrici hanno una relazione molto stretta con p; infatti si ha (esercizio):

$$p(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} x_1 \; x_2 \; x_3 \; 1 \end{vmatrix} A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{vmatrix},$$

o anche

$$p(x) = \tilde{x}^T A \tilde{x}, \tag{0.5}$$

dove useremo sempre la convenzione che se $x \in \mathbb{R}^3$ allora $\tilde{x} \in \mathbb{R}^4$ è ottenuto da x aggiungendo 1 come ultima coordinata:

$$x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{x} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Inoltre, se indichiamo con

$$p^{(2)}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j$$

la *parte quadratica* di p, abbiamo anche che

$$p^{(2)}(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} x_1 \; x_2 \; x_3 \end{vmatrix} \mathcal{A}_3 \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}.$$

Definizione 0.7 La matrice A è detta *associata* alla quadrica $\mathcal{Q}_p$ (o al polinomio p). Diremo che la quadrica è *degenere* se $\det A = 0$, e *non degenere* altrimenti.

Osservazione 0.11 La matrice A è l'*unica* matrice simmetrica per cui vale (0.5), e quindi grazie alla quale possiamo studiare le quadriche con le tecniche viste per le forme quadratiche. È per questo motivo che associamo al polinomio p proprio la matrice A e non un'altra.

Sia ora $\mathcal{Q}_p$ una quadrica di equazione $p(x_1, x_2, x_3) = 0$. Indichiamo con A la matrice associata, con $\mathcal{A}_3$ la solita sottomatrice, e con $p^{(2)}$ la parte quadratica del polinomio p. Poniamo inoltre $b = \begin{vmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha = a_{44}$, in modo da scrivere la matrice A nella forma $A = \begin{vmatrix} \mathcal{A}_3 & b \\ b^T & \alpha \end{vmatrix}$ e il polinomio p nella forma $p(x) = x^T \mathcal{A}_3 x + 2b^T x + \alpha$.

Cerchiamo di "semplificare" la forma della matrice A tramite un cambiamento ortogonale di coordinate. Poiché $\mathcal{A}_3$ è una matrice simmetrica possiamo trovare B una matrice ortogonale B tale che $B^T \mathcal{A}_3 B$ sia in forma diagonale; questo vuol dire che nelle nuove coordinate x' per le quali $x = Bx'$ la parte di grado 2 del polinomio $p(x')$ non contiene più i termini misti $x'_1 x'_2$, $x'_1 x'_3$ e $x'_2 x'_3$.

Successivamente possiamo cercare di eliminare il termine di grado 1, ovvero di risolvere il sistema lineare $\mathcal{A}_3 x = -b$ il che ci consentirebbe con una traslazione di scrivere il polinomio associato alla quadrica eliminando il termine di grado 1. Se il sistema citato è risolubile diremo che la quadrica è a centro, altrimenti che è un paraboloide. Senza dimostrazione diamo il seguente criterio

Lemma 0.8 *Sia $p \in \mathbb{R}_2[x_1, x_2, x_3]$ un polinomio di secondo grado di matrice associata $A \in M_{4,4}(\mathbb{R})$. Allora:*

(i) $\operatorname{rg}(\mathcal{A}_3) \leq \operatorname{rg}(A) \leq \operatorname{rg}(\mathcal{A}_2) + 2$;
(ii) *il sistema $\mathcal{A}_3 x = -b$ ammette soluzione se e solo se* $\operatorname{rg}(A) \leq \operatorname{rg}(\mathcal{A}_3) + 1$.
(iii) *se $q \in \mathbb{R}_2[x_1, x_2, x_3]$ è un polinomio affinemente equivalente a p di matrice associata $A' \in M_{3,3}(\mathbb{R})$, allora il sistema $\mathcal{A}_3 x = -b$ ammette soluzione se e solo se il sistema $\mathcal{A}'_3 x' = -b'$ ammette soluzione.*

Nota che se $\operatorname{rg}(\mathcal{A}_3) = 3$ cioè se $\mathcal{A}_3$ è invertibile, allora la conica è sicuramente a centro; infatti essendo $\mathcal{A}_3$ invertibile il sistema $\mathcal{A}_3 = -b$ è certamente risolubile. Inoltre in tal caso il centro è unico perché il sistema $\mathcal{A}_3 = -b$ ammette una sola soluzione, proprio perché $\mathcal{A}_3$ è invertibile.

Se la quadrica è a centro e ci interessa la forma canonica metrica non ci resta che trovare quanto valga il termine noto; se invece siamo interessati alla forma canonica affine possiamo con un cambiamento lineare ma non *metrico* di coordinate ridurci al caso in cui i coefficienti di x_1^2, x_2^2 e x_3^2 sono 1, -1 oppure 0. L'ultima cosa che ci resta da decidere è se quale sia il segno del termine noto, il che può essere fatto andando a vedere quali sono i segni degli autovalori di A tramite il criterio di Cartesio.

In realtà molto spesso questo non è necessario: se infatti $\mathcal{A}_3$ **è invertibile** allora per determinare se dobbiamo mettere 1, -1 oppure 0 come termine noto nella forma canonica affine basta calcolare il determinante di A e confrontare questo con il segno del determinante di $\mathcal{A}_3$. Infatti le trasformazioni affini non inducono un cambiamento del segno del determinante della matrice associata alla quadrica. Pertanto se il determinante di A ǹullo il termine noto dovrà essere uguale a 0, se il determinante di $\mathcal{A}_3$ e quello di A sono concordi dovrà essere uguale a 1 e se il determinante di $\mathcal{A}_3$ e quello di A sono discordi dovrà essere uguale a -1. Attenzione: come detto sopra, questo criterio "semplificato" funziona solo se $\mathcal{A}_3$ è invertibile, cioè se $\det\mathcal{A}_3$ è diverso da 0.

Se la quadrica è un paraboloide si danno due casi: quello in cui il rango di $\mathcal{A}_3$ è 1 e quello in cui il rango di $\mathcal{A}_3$ è 2.

Nel primo caso a meno di una traslazione sulla prima variabile possiamo eliminare la parte di primo grado in x_1, tramite una applicazione ortogonale che agisca solo sulle ultime due coordinate possiamo poi riportarci al caso in cui $b' \in \mathbb{R}^3$ ha solo il secondo termine diverso da zero e "riassorbire" il termine noto in x_2 con una traslazione ottenendo in tal modo come forma canonica affine $x_1^2 - x_2 = 0$, ovvero un cilindro parabolico.

Nel secondo caso a meno di una traslazione sulle prime due variabili possiamo eliminare la parte di primo grado in x_1 e x_2, possiamo poi "riassorbire" il termine noto in x_3 con una traslazione ottenendo in tal modo come forma canonica affine $x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0$, ovvero un paraboloide ellittico, nel caso in cui $\mathcal{A}_3$ abbia due autovalori positivi oppure $x_1^2 - x_2^2 - x_3 = 0$, ovvero un paraboloide iperbolico, nel caso in cui $\mathcal{A}_3$ abbia un autovalore positivo e uno negativo.

Osservazione 0.12 In pratica, per trovare la forma canonica affine di una quadrica $\mathcal{Q}_p$ si procede in questo modo. Prima di tutto si scrive la matrice simmetrica A associata al polinomio p. Utilizzando il Criterio di Cartesio si trovano il numero i_+ di autovalori positivi e il numero i_- di autovalori negativi di $\mathcal{A}_3$. Allora la parte quadratica della forma canonica affine di p sarà data dalla somma di i_+ quadrati col segno positivo e i_- quadrati col segno negativo. Poi si confronta $r = i_+ + i_-$ col rango di A: se sono uguali la quadrica è a centro e non ha termine noto quindi la forma canonica coincide con la parte di secondo grado; se differiscono di 2, la quadrica è un paraboloide e li abbiamo già classificati sopra a seconda del rango di $\mathcal{A}_3$ e del numero di autovalori positivi e negativi di $\mathcal{A}_3$. Infine, se $\mathrm{rg}(A) = r + 1$, si calcola il numero di autovalori positivi e negativi di$A$ e la si confronta con $s = i_+ - i_-$, per stabilire se si è nel caso in cui il termine noto è uguale a 1 o nel caso in cui è uguale a -1. In realtà, come osservato in precedenza, se $\mathcal{A}_3$ è invertibile allora basta calcolare il segno del determinante di A per vedere se bisogna aggiungere 1 o -1.

Dunque per trovare la forma canonica affine di una quadrica di matrice associata A basta calcolare $\mathrm{rg}(A)$, $\mathrm{rg}(\mathcal{A}_3)$, i_+ e i_- e il segno del determinante di A oppure ove necessario il numero di autovalori positivi e negativi di A e andarsi a leggere nello schema precedente la forma canonica affine corrispondente. Usando il Criterio di Cartesio questo è quindi un problema completamente risolto.

Esempio 0.4 *Vogliamo trovare la forma canonica affine della conica di equazione*

$$p(x,y) = 5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 32 = 0.$$

Le matrici associate a questa conica sono

$$A = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & 0 \\ 8\sqrt{2} & 0 & 32 \end{vmatrix}, \qquad \mathcal{A}_2 = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di $\mathcal{A}_2$ è $p_{\mathcal{A}_2}(\lambda) = (2-\lambda)(8-\lambda)$, *per cui* $\mathrm{sp}(\mathcal{A}_2) = \{2, 8\}$, $\mathrm{rg}(\mathcal{A}_2) = 2$ *e* $i_+ - i_- = 2$. *Inoltre* $\det A = -128$ *per cui* $\mathrm{rg}(A) = 3$ *e quindi siamo nel caso in cui la forma canonica affine è* $X^2 + Y^2 - 1 = 0$, *cioè* $\mathcal{C}_p$ *è un'ellisse reale.*

Esempio 0.5 *Consideriamo la quadrica* $\mathcal{Q}_p \subset \mathbb{R}^3$ *di equazione*

$$p(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2xy + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 2z + 4 = 0.$$

Le matrici associate sono

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad e \quad \mathcal{A}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

calcolando i polinomi caratteristici e applicando il Criterio di Cartesio vediamo subito che $\mathrm{rg}(A) = 3$, $\mathrm{rg}(\mathcal{A}_3) = 1$ *e che* $\mathcal{A}_3$ *ha un unico autovalore non nullo che risulta essere positivo. Pertanto si tratta di un paraboloide degenere, di forma canonica affine* $X^2 - Y = 0$, *cioè un cilindro parabolico.*