Scritto di Geometria per Ingegneria

Sessione Estiva — Anno Accademico 2002–2003 — 23 Settembre 2003

Cognome: Nome: Matricola: Immatricolato nel

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su **ogni** *foglio che consegnerai devi scrivere, in* **stampatello,** *nome, cognome e numero di matricola. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio).*

Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma sui fogli protocollo a quadretti che hai debitamente portato con te. Dev'essere **ben** *chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.*

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se **più di una** *risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (e s'intende che due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere* **giustificate:** *non basta rispondere "Si" o "No". Se ritieni che l'affermazione proposta sia sempre vera (o sempre falsa), devi spiegare perchè; se invece pensi sia talvolta falsa (o talvolta vera), devi indicare un esempio concreto in cui lo è.*

Indica con a la penultima cifra del tuo numero di matricola.

1. Verifica che i punti $(1,1,2)$, $(2,4,2)$ e $(a,-a-1,1)$ non sono allineati e trova equazioni parametriche e cartesiane del piano passante per essi.

2. Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A_k = \begin{vmatrix} 4 & 2a+1 \\ k^2-3 & (a-5) \end{vmatrix}$ ammette una base ortonormale di autovettori?

3. Determina per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione $F\colon \mathbb{R}^3 \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ data da

$$F(x) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 + (k^2-a)\sin x_3 \\ x_2 & (a-6)x_3 \end{vmatrix}$$

è un'applicazione lineare.

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Al variare di $h \in \mathbb{R}$ studia il seguente sistema lineare e quando possibile trovane le soluzioni:

$$\begin{cases} x + 5y - 3z = 7h, \\ 2x - 4y + z = 0, \\ 2x + hy + az = 5. \end{cases}$$

B. Al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ considera la matrice $A_\lambda \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ e il vettore $v_\lambda \in \mathbb{R}^4$, dati rispettivamente da

$$A_\lambda = \begin{vmatrix} 3 & 2 & a-5 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ a-4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix}, \qquad v_\lambda = \begin{vmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \\ 8\lambda \end{vmatrix}.$$

(i) Posto $W = \operatorname{Span}(e_2, e_4)$ trova equazioni parametriche e cartesiane per $A_\lambda(W)$.
(ii) Determina per quali valori di λ il vettore v_λ appartiene a $A_\lambda(W)$.
(iii) Trova per quali valori di λ la matrice A_λ è invertibile.
(iv) Per i valori di λ di cui al punto precedente, calcola $A_\lambda^{-1}(v_\lambda)$.

C. Siano dati $p_1(t) = (a+1)t^2 + t - (a-2)$, $p_2(t) = t - 1$, $p_3(t) = -t^2 + t - a - 3$.
(i) Dimostra che i polinomi p_1, p_2, p_3 formano una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}_2[t]$.
(ii) Trova le coordinate dei polinomi $p(t) = t^2 - 2at$ e $q(t) = t^2 - 2t + 1$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.
(iii) Quale è il polinomio $s(t) \in \mathbb{R}_2[t]$ le cui coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ sono 2, $a-2$, $a+7$?
