Scritto di Geometria per Ingegneria

Sessione Estiva — Anno Accademico 2002–2003 — 14 Luglio 2003

Cognome: Nome: Matricola: Immatricolato nel

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su **ogni** *foglio che consegnerai devi scrivere, in* **stampatello,** *nome, cognome e numero di matricola. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio).*

Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma sui fogli protocollo a quadretti che hai debitamente portato con te. Dev'essere **ben** *chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.*

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se **più di una** *risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (e s'intende che due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere* **giustificate:** *non basta rispondere "Si" o "No". Se ritieni che l'affermazione proposta sia sempre vera (o sempre falsa), devi spiegare perchè; se invece pensi sia talvolta falsa (o talvolta vera), devi indicare un esempio concreto in cui lo è.*

Indica con a l'ultima cifra del tuo numero di matricola.

1. Esiste un sistema lineare incompatibile con 2 equazioni e $a+3$ incognite?

2. Se $A \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ e cancellando la seconda colonna di A si ottiene una matrice con determinante $a-6$ il rango di A vale necessariamente 3?

3. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazioni parametriche $x = t+s$, $y = (a-5)t + s + \tau$, $z = t + s + \tau$, $w = t$. Determina la dimensione di U e trovane equazioni cartesiane.

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Siano U, V e W spazi vettoriali e $T : U \to V$ e $S : V \to W$ applicazioni lineari. Dimostra che $S \circ T$ è l'applicazione nulla se e solo se $\mathrm{ImT} \subseteq \mathrm{Ker}S$.

B. Fissato un sistema di riferimento cartesiano $RC(O, A_1, A_2, A_3)$ in $\mathcal{E}^3$,

(i) scrivi equazioni parametriche e cartesiane per la retta r passante per i punti P_0 e P_1 aventi coordinate rispettivemente $(-1, a, 0)$ e $(1, 0, a)$;

(ii) trova il piano π contenente r e parallelo alla retta ρ di equazioni cartesiane $x_1 + x_2 - 2x_3 = a - 2$, $x_1 - 3x_2 + 2x_3 = a$,

(iii) calcola la distanza del punto $P_2 = (3, a, 4)$ da π.

(iv) calcola l'angolo compreso tra π e la retta s di equazioni parametriche $x = t+a$, $y = -3t+a$, $z = at-2$.

C. Sia $u = e_1 + (a-4)e_2 + e_3 \in \mathbb{R}^3$.

(i) Dimostra che l'applicazione $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $T(x) = x \wedge u$ è lineare.

(ii) Determina $\mathrm{Ker}T$ e $\mathrm{Im}T$ dando di entrambi equazioni parametriche e cartesiane.

(iii) Trova la matrice associata a T rispetto ad una base di $\mathbb{R}^3$ a tua scelta.

(iv) Trova autovalori e autospazi di T e determina se sia o meno diagonalizzabile.
