Scritto di Geometria per Ingegneria

Sessione Estiva — Anno Accademico 2002–2003 — 30 Giugno 2003

Cognome: Nome: Matricola: Immatricolato nel

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su **ogni** *foglio che consegnerai devi scrivere, in* **stampatello,** *nome, cognome e numero di matricola. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio).*

Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma sui fogli protocollo a quadretti che hai debitamente portato con te. Dev'essere **ben** *chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.*

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se **più di una** *risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (e s'intende che due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere* **giustificate:** *non basta rispondere "Si" o "No". Se ritieni che l'affermazione proposta sia sempre vera (o sempre falsa), devi spiegare perchè; se invece pensi sia talvolta falsa (o talvolta vera), devi indicare un esempio concreto in cui lo è.*

Indica con a la penultima cifra del tuo numero di matricola.

1. Esiste uno spazio vettoriale contenente esattamente $a+2$ elementi?

2. Esistono $a+1$ vettori ortonormali (rispetto al prodotto scalare canonico) in $\mathbb{R}^3$?

3. Calcola la distanza del punto $P=(0,1,a-7)$ dal piano π passante per i punti $A=(1,1,1)$, $B=(3,2a-2,4)$, $C=(2,2,a-5)$.

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Data la matrice $A=\begin{vmatrix} 2 & (a-6) \\ (a-6) & -2 \end{vmatrix}$ considera l'applicazione $F\colon M_{2,2}(\mathbb{R})\to M_{2,2}(\mathbb{R})$ data da $F(X)=X-\operatorname{tr}(AX)A$.

(i) Dimostra che F è lineare;
(ii) determinane nucleo e immagine;
(iii) verifica che A è un autovettore di F e calcola il relativo autovalore;
(iv) verifica che 1 è un autovalore di F con molteplicità geometrica 3 e deducine che F è diagonalizzabile.

B. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dato da

$$W=\operatorname{Span}\left(2e_1-e_2+e_4, e_1-e_2+ae_3, e_1+e_2+(a-2)e_3-e_4\right).$$

(i) Determina la dimensione di W e trova una base di W.
(ii) Trova una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare canonico) di W.
(iii) Estendi tale base ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.
(iv) Sia $P_1\colon\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ la proiezione ortogonale su $W^\perp$. Trova la matrice che rappresenta P_1 rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.
(v) Sia $P_2\colon\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ la proiezione ortogonale su W. Trova la matrice che rappresenta P_2 rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

C. Al variare del parametro $k\in\mathbb{R}$ studia il seguente sistema lineare e quando possibile trovane le soluzioni:

$$\begin{cases} y+z+kw=a-6, \\ kx+z+w=2, \\ x+ky+w=a-4, \\ x+y+kz=0. \end{cases}$$
