Scritto di Geometria per Ingegneria

Sessione Estiva — Anno Accademico 2001–2002 — 23 Settembre 2002

Cognome: Nome: Matricola: Immatricolato nel

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su foglio che consegnerai devi scrivere, in nome, cognome e numero di matricola. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio).

Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma sui fogli protocollo a quadretti che hai debitamente portato con te. Dev'essere chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (e s'intende che due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere non basta rispondere "Si" o "No". Se ritieni che l'affermazione proposta sia sempre vera (o sempre falsa), devi spiegare perchè; se invece pensi sia talvolta falsa (o talvolta vera), devi indicare un esempio concreto in cui lo è.

a

1. Se 3 vettori di $\mathbb{R}^3$ hanno tutti la prima coordinata uguale a $a-3$ possono essere una base di $\mathbb{R}^3$?
2. Un sottospazio affine di dimensione 4 in $\mathbb{R}^6$ può essere descritto da una sola equazione cartesiana?
3. Scrivi equazioni cartesiane e parametriche per il piano passante per il punto $P=(2,a-4,-5)$ e contenente la retta r passante per il punto $Q=(1,1,1)$ e parallela al vettore $v_r=(1,2,a+1)$.

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Presi i sottospazi $U, V \subset \mathbb{R}^4$ dati da

$$U = \mathrm{Span}\left((a-2)e_1+e_2+e_4, e_1+e_2, ae_1+e_2+e_4\right),$$
$$V = \{x \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1+x_2+x_4=0, \ x_2+x_3-(a-4)x_4=0\}.$$

(i) determina la dimensione di U, V, $U\cap V$ e $U+V$;
(ii) esibisci una base ortonormale di V rispetto al prodotto scalare canonico;
(iii) completa la base di cui al punto precedente ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

B. Dato il polinomio $P(x)=2x_1x_2+(a-3)x_2^2+2(a-5)x_2x_3+x_3^2+2x_1-a+3$,
(i) trova la forma canonica affine della quadrica $\mathcal{Q}_P$ ad esso associata,
(ii) determina le intersezioni di $\mathcal{Q}_P$ con la retta r passante per il punto $P=(1,2,0)$ e parallela al vettore $v=(1,0,a-4)$.

C. Sia $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'unica applicazione lineare tale che

$$f(e_2)=e_1+e_2, \quad f(e_1+e_2)=e_2-e_3, \quad f(e_3)=e_1+2e_2-e_3$$

e al variare di $t\in\mathbb{R}$ sia $g_t:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ l'unica applicazione lineare tale che

$$g_t(e_1+e_2)=2e_1+2e_2, \quad g_t(e_1-e_2)=-e_1+te_2+e_3.$$

(i) Esibisci le matrici associate a f e g_t rispetto alle basi canoniche degli spazi di partenza e di arrivo.
(ii) Trova nucleo e immagine di f e g_t per ogni $t\in\mathbb{R}$
(iii) Trova autovalori e autovettori di f, decidendo se f sia diagonalizzabile.
(iv) Al variare di $t\in\mathbb{R}$ calcola la dimensione di $\mathrm{Im}f\cap\mathrm{Im}g_t$ determinando per quali valori di $t\in\mathbb{R}$ si ha $\mathrm{Im}f=\mathrm{Im}g_t$.
