Scritto di Geometria per Ingegneria

Sessione Invernale — Anno Accademico 2002–2003 — 8 Aprile 2003

Cognome: Nome: Matricola: Immatricolato nel

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su ogni foglio che consegnerai devi scrivere, in stampatello, nome, cognome e numero di matricola. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio).

Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma sui fogli protocollo a quadretti che hai debitamente portato con te. Dev'essere ben chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se più di una risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (e s'intende che due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere giustificate: non basta rispondere "Si" o "No". Se ritieni che l'affermazione proposta sia sempre vera (o sempre falsa), devi spiegare perchè; se invece pensi sia talvolta falsa (o talvolta vera), devi indicare un esempio concreto in cui lo è.

Indica con a il tuo mese di nascita.

1. Il sistema lineare $\begin{cases} \sqrt{2}x + y = a - 4, \\ -(a-3)x + \sqrt{8}y = 2 \end{cases}$ ha soluzioni intere oppure no?

2. Se $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ ha due autovalori distinti è possibile che la sua traccia valga $a - 3$?

3. Data una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di uno spazio vettoriale reale V, è sempre vero che $\operatorname{Span}(v_1, v_2, v_1 - v_3)$ coincide con $\operatorname{Span}(v_3, v_2 - v_3, v_1 - v_3)$?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Presa la matrice $A = \begin{vmatrix} 1 & 2(a-4) \\ 2 & 4(a-4) \end{vmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, sia $W = \{M \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \ : \ AM = O\}$.

(i) Dimostra che W è un sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\mathbb{R})$, e trovarne la dimensione.
(ii) Determina due diversi complementi U_1 e U_2 di W in $M_{2,2}(\mathbb{R})$.
(iii) I sottospazi U_1 e U_2 di cui al punto precedente sono in somma diretta oppure no?

B. Fissato un riferimento cartesiano $RC(O, A_1, A_2, A_3)$ in $\mathcal{A}^3$, considera il punto $P_0 = (a-6, 1, 3)$ e le rette r_1 ed r_2 di equazioni rispettivamente

$$r_1 : \quad \begin{cases} x = 2 + s, \\ y = -2s + a - 4, \\ z = -1 + 3s, \end{cases} \qquad r_2 : \quad \begin{cases} x + y + 2z = 0, \\ x + y + z = a - 5. \end{cases}$$

(i) Determina equazioni parametriche e cartesiane della retta s passante per P_0, ortogonale alla retta r_1 ed incidente la retta r_2;
(ii) Calcola la distanza fra le rette r_1 ed s.
(iii) Trova la distanza tra il punto $R = (a-7, 2, 1)$ e il piano π ortogonale ad s e passante per $Q = (1, 1, 1)$.

C. Sia $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x) = \begin{vmatrix} x_1 - (a-6)x_2 + 3x_3 \\ 2x_2 + (a-4)x_3 \\ -x_3 \end{vmatrix}.$$

(i) Trova immagine e nucleo di T.
(ii) Determina equazioni cartesiane e parametriche di $T(W)$, dove $W = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ 3x_1 + x_3 = 0\}$.
(iii) Determina autovalori ed autovettori di T.
(iv) L'applicazione T è invertibile?
(v) Determina autovalori ed autovettori di $T^3 = T \circ T \circ T$.
