Scritto di Geometria per Ingegneria

Sessione Estiva — Anno Accademico 2001–2002 — 15 Luglio 2002

Cognome: Nome: Matricola: Immatricolato nel

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su foglio che consegnerai devi scrivere, in nome, cognome e numero di matricola. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio).

Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma sui fogli protocollo a quadretti che hai debitamente portato con te. Dev'essere chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (e s'intende che due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere non basta rispondere "Si" o "No". Se ritieni che l'affermazione proposta sia sempre vera (o sempre falsa), devi spiegare perchè; se invece pensi sia talvolta falsa (o talvolta vera), devi indicare un esempio concreto in cui lo è.

$a11$

1. Siano $u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$ vettori di uno spazio vettoriale V tali che $\mathrm{Span}(u_1, u_2) = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$. È vero che $\{u_1, u_2\} = \{v_1, v_2\}$?

2. Siano dati il vettore $v_k = (1, k, 1) \in \mathbb{R}^3$ (dove $k \in \mathbb{R}$) e la retta r di equazioni cartesiane $2x + az = 1$, $3x + y + z = a - 6$. Esiste un valore di k per cui v_k è parallelo a r?

3. Esiste una matrice simmetrica definita negativa con traccia positiva?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Considera l'applicazione $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ data da

$$F(x) = \begin{vmatrix} x_1 + (a+1)x_2 \\ (a-3)x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 7x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \end{vmatrix}.$$

(i) Verifica che F è un'applicazione lineare,
(ii) determinane l'immagine ed il nucleo,
(iii) considera i sottospazi di $\mathbb{R}^3$ dati da

$$V = \mathrm{Span}\,(e_1 + e_3, e_2 + (a-1)e_3) \qquad \text{e} \qquad W = \mathrm{Span}\,(e_1 - e_2, (a+3)e_1 + e_3)\,,$$

determina la dimensione ed una base per lo spazio $F(V) \cap F(W)$.

B. Fissato un riferimento cartesiano $RC(O, A_1, A_2, A_3)$ in $\mathcal{A}^3$, considera i punti $P = (3, 5, 1)$ e $Q = (a, 2, 2)$ le rette r ed s di equazioni rispettivamente

$$r: \begin{cases} x = -1 + 3t, \\ y = 2 + t, \\ z = -2t, \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x - 2y - z = 0, \\ x + y + z = 6. \end{cases}$$

(i) Determina equazioni parametriche e cartesiane della retta σ passante per P, perpendicolare alla retta r ed incidente la retta s;
(ii) determina un'equazione cartesiana del piano π passante per Q e ortogonale ad s;
(iii) calcola le distanze fra le rette r e σ e fra la retta σ e il piano π.

C. Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema è compatibile, e trovarne le soluzioni in funzione di k:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 4w = 1, \\ -2x + y + kz + 7w = 0, \\ 3x + az - w = a + 2, \\ 2x + y + 2w = 0. \end{cases}$$
