Scritto di Geometria per Ingegneria

Sessione Estiva — Anno Accademico 2002–2003 — 18 Marzo 2003

Cognome: Nome: Matricola: Immatricolato nel

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su ogni foglio che consegnerai devi scrivere, in stampatello, nome, cognome e numero di matricola. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio).

Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma sui fogli protocollo a quadretti che hai debitamente portato con te. Dev'essere ben chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se più di una risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (e s'intende che due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere giustificate: non basta rispondere "Si" o "No". Se ritieni che l'affermazione proposta sia sempre vera (o sempre falsa), devi spiegare perchè; se invece pensi sia talvolta falsa (o talvolta vera), devi indicare un esempio concreto in cui lo è.

Indica con a l'ultima cifra del tuo numero di matricola.

1. Sia $A_k \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ dipendente dal parametro reale k. Se $\operatorname{Spec}(A_k) = \{a^2+4, -k^2\}$ è vero che A_k è diagonalizzabile per ogni $k \in \mathbb{R}$?

2. Determina la posizione reciproca delle rette r_1, r_2 di equazioni rispettivamente $x-y+(a-4)z = 2$, $x+ay+kz = a-5$ e $x = t+k$, $y = (a-6)t-2$, $z = t-a$, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

3. Dato uno spazio vettoriale reale V di dimensione n e un sottospazio W di V di dimensione $m < n$, è vero che ogni sottospazio di V di dimensione minore di m è contenuto in W?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Considera l'applicazione $T\colon M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ data da

$$T\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & (\beta+\gamma)/2 \\ (\beta+\gamma)/2 & \delta \end{vmatrix}.$$

(i) Verifica che T è lineare;
(ii) trova nucleo e immagine di T;
(iii) descrivi esplicitamente T^2;
(iv) determina autovalori e autovettori di T e dì se T è diagonalizzabile o no.

B. Studia il seguente sistema al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x+3y+kz+2w = k, \\ x+6y+kz+3w = 2k+1, \\ -x-3y+(k-2)w = 1-k, \\ kz+(2-k)w = a+1. \end{cases}$$

C. Sia $\mathbb{R}_2[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2. Per $p, q \in \mathbb{R}_2[t]$ poniamo

$$\langle p,q\rangle = p(0)q(0) + (a-6)p(1)q(1) + p'(-1)q'(-1) + p(1)q''(0) + p''(0)q(1),$$

dove p' e p'' indicano rispettivamente la derivata prima e seconda di p.
(i) Dimostra che $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}_2[t]$;
(ii) Trova la matrice che rappresenta questo prodotto scalare rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$;
(iii) Determina il nucleo di $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$.
(iv) Esiste un polinomio $p \in \mathbb{R}_2[t]$ tale che $\langle p,p\rangle < 0$?
