Scritto di Geometria per Ingegneria

Sessione Estiva — Anno Accademico 2001–2002 — 25 Giugno 2002

Cognome: Nome: Matricola: Immatricolato nel

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su foglio che consegnerai devi scrivere, in nome, cognome e numero di matricola. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio).

Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma sui fogli protocollo a quadretti che hai debitamente portato con te. Dev'essere chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (e s'intende che due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere non basta rispondere "Si" o "No". Se ritieni che l'affermazione proposta sia sempre vera (o sempre falsa), devi spiegare perchè; se invece pensi sia talvolta falsa (o talvolta vera), devi indicare un esempio concreto in cui lo è.

a

1. Siano $v_1, \dots, v_n$ vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V. È vero che $v_2, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti?

2. La matrice $A = \begin{vmatrix} 2 & 7 & a \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ ha rango 3?

3. Per quale $k \in \mathbb{R}$ il piano π di equazione cartesiana $x - y + (a+1)z = 3$ è parallelo alla retta r di equazione $\begin{cases} x + y = a - 2, \\ kx - (a-3)y + z = 2a. \end{cases}$

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Siano $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gli endomorfismi lineari ottenuti componendo in maniera opportuna le applicazioni lineari $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ date da

$$\tau \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - (a+1)x_2 \\ x_1 - 2x_2 \end{vmatrix} \qquad \sigma \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_1 - ax_2 + x_3 \end{vmatrix}.$$

(i) Scrivi le matrici associate a τ, σ, h ed l rispetto alle basi canoniche dei rispettivi spazi di partenza e di arrivo.

(ii) Trova nucleo e immagine di σ e verifica il teorema della dimensione.

(iii) Trova autovalori ed autovettori di h ed l e dì se sono diagonalizzabili.

B. Sia $T : V \to W$ una applicazione lineare tra gli spazi vettoriali V e W. Siano $v_1, \dots, v_k \in V$ generatori di V. Dimostra che T è surgettiva se e solo se $T(v_1), \dots, T(v_k)$ sono generatori di W.

C. Dato il polinomio

$$P(x) = x_1^2 - 2(a-4)x_1x_2 - x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2 - 2x_1 - 2x_3 + a - 5,$$

(i) determina se esistono valori del parametro reale k per i quali il punto $Q_k = (1, k, -1)$ appartiene alla quadrica $\mathcal{Q}_P$.

(ii) trova la forma canonica affine della quadrica $\mathcal{Q}_P$.
