Scritto di Geometria per Ingegneria Edile-Architettura

Sessione Invernale — Anno Accademico 2002–2003 — 17 Febbraio 2003

Cognome: Nome: Matricola: Immatricolato nel

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su ogni foglio che consegnerai devi scrivere, in stampatello, nome, cognome e numero di matricola. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio).

Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma sui fogli protocollo a quadretti che hai debitamente portato con te. Dev'essere ben chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se più di una risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (e s'intende che due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere giustificate: non basta rispondere "Si" o "No". Se ritieni che l'affermazione proposta sia sempre vera (o sempre falsa), devi spiegare perchè; se invece pensi sia talvolta falsa (o talvolta vera), devi indicare un esempio concreto in cui lo è.

Indica con a la penultima cifra del tuo numero di matricola.

1. Esiste una matrice $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ non diagonalizzabile tale che $A^2 = A \cdot A$ sia diagonalizzabile?

2. Dati $v_1, \ldots, v_n$ appartenenti allo spazio vettoriale V, considera l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to V$ data da $T(x) = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$. È vero che se $v_1, \ldots, v_n$ sono generatori di V allora T è iniettiva?

3. Calcola il determinante della matrice $A = \begin{vmatrix} a & 1 & 3-a & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & a-6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Fissato un riferimento cartesiano $RC(O, A_1, A_2, A_3)$ in $\mathcal{A}^3$, considera i punti $P = (1, 1, 0)$ e $Q = (2, a, -3)$ le rette r ed s di equazioni rispettivamente

$$r: \quad \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = t - 2, \\ z = t + a - 4, \end{cases} \qquad s: \quad \begin{cases} x + 2y - 2z = 0, \\ 2x + y + z = -a. \end{cases}$$

(i) verifica che né P né Q appartengono ad r od s;

(ii) determina equazioni parametriche e cartesiane della retta ρ perpendicolare ad r ed s e incidente ad entrambe;

(iii) determina un'equazione cartesiana del piano π passante per P e ortogonale ad s;

(iv) calcola le distanze fra il punto Q e il piano π e fra le rette r e ρ.

B. Dati i vettori $p_1(t) = t - a$, $p_2(t) = 2t + 5$, $p_3(t) = t^2 - at + 1$

(i) verifica che costituiscono una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}_2[t]$,

(ii) verifica che anche i polinomi $q_1(t) = t^2 - a$, $q_2(t) = 1$, $q_3 = 2t^2 + 3t - a + 3$ costituiscono una base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}_2[t]$,

(iii) trova la matrice A del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

(iv) calcola il determinante di A.

C. Dato il polinomio $P(x) = x_1^2 - 6x_1x_2 + (a-5)x_2^2 + 2x_2x_3 - 5x_3^2 + 2x_1 + 9$,

(i) trova (se esistono) le intersezioni della quadrica $\mathcal{Q}_P$ associata al polinomio con la retta passante per il punto Q di coordinate $(1, 2, a-4)$ e avente vettore direttore $(1, 0, -1)$;

(ii) trova la forma canonica affine di $\mathcal{Q}_P$.
