Scritto di Geometria per Ingegneria

Sessione Estiva — Anno Accademico 2001–2002 — 22 Aprile 2002

Cognome: Nome: Matricola: Immatricolato nel

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su foglio che consegnerai devi scrivere, in nome, cognome e numero di matricola. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio).

Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma sui fogli protocollo a quadretti che hai debitamente portato con te. Dev'essere chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (e s'intende che due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere non basta rispondere "Si" o "No". Se ritieni che l'affermazione proposta sia sempre vera (o sempre falsa), devi spiegare perchè; se invece pensi sia talvolta falsa (o talvolta vera), devi indicare un esempio concreto in cui lo è.

a

1. Se i vettori v_1, v_2, v_3 formano una base dello spazio vettoriale V, i vettori $w_1 = v_2$, $w_2 = av_1 + v_3$ e $w_3 = av_1 + v_2 + v_3$ sono sempre dei generatori di V?

2. Esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che il sistema lineare $\begin{cases} x_1 + x_2 = a - 4, \\ 3x_1 - kx_2 = 9 \end{cases}$ sia incompatibile?

3. Può esistere una matrice $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ congruente alla matrice $\begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$ tale che $\mathrm{sp}(L_A) = \{a+1, 2\}$?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Presi i sottospazi $U, V \subset \mathbb{R}^4$ dati da

$$U = \mathrm{Span}\left((a-2)e_1 + e_2 + e_4, e_1 + e_2, ae_1 + 3e_2 + e_4\right),$$
$$V = \mathrm{Span}\left(e_1 + (a+1)e_3, 2e_1 + e_2 + (a+1)e_3, 3e_1 + 2e_2 + (a+1)e_3\right)$$

(i) determina la dimensione di U, V, $U \cap V$ e $U + V$;
(ii) esibisci una base ortonormale di V rispetto al prodotto scalare canonico;
(iii) completa la base di cui al punto precedente ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

B. Nello spazio $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare standard è dato un versore u. Considera la matrice A così definita: $A = I_n - u^T u$ dove ${}^T u$ indica la trasposta di u.
(i) Verifica che la matrice A è simmetrica,
(ii) determina autovalori e autospazi di A,
(iii) stabilisci se A è invertibile o meno.

C. Fissato un sistema di riferimento cartesiano $RC(O, A_1, A_2, A_3)$ in $\mathcal{E}^3$,
(i) scrivi equazioni cartesiane e parametriche per la retta r_1 passante per i punti $P_1 = (1, a+1, 0)$ e $P_2 = (2, 0, 2)$, e per la retta r_2 parallela al vettore $(-1, 1, 0)$ e passante per il punto $P_3 = (2, 3, a-4)$;
(ii) trova il piano π parallelo a r_1 e contenente r_2,
(iii) scrivi equazioni cartesiane e parametriche per la retta r contenuta in π, ortogonale a r_2 e passante per il punto $Q_1 = (-\sqrt{2}, 1, 2)$,
(iv) orientate a piacere le rette r ed r_1, calcola il coseno dell'angolo tra esse compreso.
