Scritto di Geometria per Ingegneria

Sessione Estiva — Anno Accademico 2001–2002 — 26 Marzo 2002

Cognome: Nome: Matricola: Immatricolato nel

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su foglio che consegnerai devi scrivere, in nome, cognome e numero di matricola. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio).

Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma sui fogli protocollo a quadretti che hai debitamente portato con te. Dev'essere chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (e s'intende che due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere non basta rispondere "Si" o "No". Se ritieni che l'affermazione proposta sia sempre vera (o sempre falsa), devi spiegare perchè; se invece pensi sia talvolta falsa (o talvolta vera), devi indicare un esempio concreto in cui lo è.

a

1. Trova equazioni parametriche e cartesiane del piano π passante per il punto $P = (1, -2, -a)$ e contenente la retta $r : \begin{cases} x - y - z = 1, \\ (a-3)x - 2y - z = 2. \end{cases}$

2. Calcola il determinante della matrice $A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & a-4 & -1 & a+1 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$.

3. Può esistere una matrice $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ simile alla matrice $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a-2 & -3 \end{vmatrix}$ tale che $\mathrm{sp}(L_A) = \{2, -2\}$?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Dato il polinomio $P(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2(a+3)x_2x_3 - x_3^2 + 2(a+2)x_1 - a + 3$,

(i) determina per quali $k \in \mathbb{R}$ il punto $(a+1, 0, k)$ appartiene alla quadrica $\mathcal{Q}_P$ ad esso associata.

(ii) Trova la forma canonica affine di $\mathcal{Q}_P$.

B. Sia $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ l'applicazione lineare

$$T \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = (a+2)x_2 - x_3,$$

e poniamo $V = \operatorname{Ker} T$.

(i) Calcola la dimensione di V.

(ii) Trova una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare canonico) di V.

(iii) Posto $W = V^\perp$, trova la proiezione ortogonale P_W di $\mathbb{R}^4$ su W.

(iv) Trova la proiezione ortogonale P_V di $\mathbb{R}^4$ su V.

C. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ discuti il seguente sistema lineare e, se possibile, trovane le soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 - x_4 = a, \\ x_2 + x_3 - x_4 = k, \\ 3x_1 + 4x_2 = -2, \\ kx_2 - (a+1)x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$
