Scritto di Geometria per Ingegneria Edile-Architettura

Sessione Invernale — Anno Accademico 2002–2003 — 3 Febbraio 2003

Cognome: Nome: Matricola: Immatricolato nel

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su ogni foglio che consegnerai devi scrivere, in stampatello, nome, cognome e numero di matricola. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio).

Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma sui fogli protocollo a quadretti che hai debitamente portato con te. Dev'essere ben chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se più di una risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (e s'intende che due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere giustificate: non basta rispondere "Si" o "No". Se ritieni che l'affermazione proposta sia sempre vera (o sempre falsa), devi spiegare perchè; se invece pensi sia talvolta falsa (o talvolta vera), devi indicare un esempio concreto in cui lo è.

Indica con a l'ultima cifra del tuo numero di matricola.

1. Data la matrice diagonalizzabile $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, è vero che se esiste una matrice $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tale che $AB \neq BA$ allora il polinomio caratteristico di A ha almeno due radici distinte?

2. Trova la forma canonica affine della conica associata al polinomio

$$P(x, y) = x^2 - 2(a - 2)xy + y^2 + 2x + 4y + a - 6 = 0.$$

3. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ esiste una matrice $X \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ tale che

$$\begin{vmatrix} 1 & a-3 \\ 2 & k \end{vmatrix} X \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pi & \sqrt{7} \\ 1 & a \end{vmatrix}?$$

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Fissato un vettore $v_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ considera l'applicazione $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da

$$T(x) = x - (a + 1)\frac{\langle x, v_0\rangle}{\langle v_0, v_0\rangle} v_0,$$

dove $\langle \cdot, \cdot\rangle$ indica il prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^3$.

(i) Dimostra che T è lineare;
(ii) determina nucleo e rango di T;
(iii) trova la matrice associata a T rispetto ad una base di $\mathbb{R}^3$ a tua scelta;
(iv) trova autovalori e autovettori di T e dì se T è diagonalizzabile.

B. Considera i sottospazi vettoriali $U, V \subset \mathbb{R}^4$ dati da

$$U = \{x \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_2 - (a - 6)x_3 = 0\}, \quad V = \{x \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + (a - 4)x_2 + 3x_4 = 0\};$$

(i) trova una base di U e una di V;
(ii) trova una base di $U \cap V$ e completala ad una base di $\mathbb{R}^4$;
(iii) calcola le coordinate del vettore $e_1 + (a - 3)e_3 + 2e_3 + (5 - a)e_4$ rispetto a tale base.

C. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ studia il seguente sistema lineare e quando possibile trovane le soluzioni

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + kx_4 = 3, \\ kx_1 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + kx_2 + x_4 = a, \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 6. \end{cases}$$
