Scritto di Geometria. Anno Accademico 2009–2010. 10 Febbraio 2010

Cognome:_______________ Nome:_______________ Matricola:__________ Immatricolato nel ________

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su **ogni** *foglio che consegnerai devi scrivere, in* **stampatello,** *nome, cognome e numero di matricola. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio).*

Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma sui fogli protocollo a quadretti che hai debitamente portato con te. Dev'essere **ben** *chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.*

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se **più di una** *risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (e s'intende che due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere* **giustificate:** *non basta rispondere "Si" o "No". Se ritieni che l'affermazione proposta sia sempre vera (o sempre falsa), devi spiegare perchè; se invece pensi sia talvolta falsa (o talvolta vera), devi indicare un esempio concreto in cui lo è.*

Indica con a la penultima cifra del tuo numero di matricola.

1. Esiste una matrice quadrata A tale che $\det(A^2) = a - 5$?

2. Al variare dei parametri $h, k \in \mathbb{C}$, stabilisci se il sistema $\begin{cases} x + iy - z = 1, \\ hx + ihy - hz = k - a - 2i \end{cases}$ è compatibile.

3. Esiste un prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ che sia indefinito e tale che $\langle e_1, e_1\rangle$, $\langle e_2, e_2\rangle$ e $\langle e_3, e_3\rangle$ siano negativi?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Fissato un riferimento cartesiano $RC(O, A_1, A_2, A_3)$ in $\mathcal{E}^3$, considera la retta r di equazioni parametriche $x = 2t+1$, $y = (a+1)t$, $z = t+4$ e il piano π di equazione cartesiana $x+y-(a-4)z = a-6$.

(i) Trova l'intersezione di r e π,

(ii) calcola la distanza del punto $P = (a - 5, 1, 3)$ dalla retta r e dal piano π,

(iii) scrivi equazioni per la retta s ortogonale a π e passante per $Q = (2, a - 7, 0)$,

(iv) calcola la distanza di r ed s

(v) orientate a piacere r ed s, trova l'angolo tra di esse.

B. Considera i sottospazi vettoriali S e T di $\mathbb{R}^4$ dati rispettivamente da

$$S = \mathrm{Span}\{e_1 + (a-4)e_2 + e_4, e_2 - 4e_3, e_1 + 2e_2 - e_4\}, \quad T = \mathrm{Span}\{e_1 + e_2 - e_3, e_1 + (a-5)e_4\},$$

(i) trova dimensione di S e T;

(ii) completa la base di T ad una base di $\mathbb{R}^4$;

(iii) esibisci una base di $S + T$ e una di $S \cap T$.

C. Al variare di $h \in \mathbb{R}$ considera la matrice $A_h = \begin{vmatrix} 4-2h & 1 & h \\ -1 & 2-h & 1 \\ h & 1 & 4-2h \end{vmatrix}$.

(i) Con l'aiuto di opportune mosse di Gauss calcola $\det(A_h - \lambda I_3)$,

(ii) trova autovalori e autovettori di A_h, stabilendo per quali h la matrice A_h è diagonalizzabile,

(iii) determina per quali valori di h esiste una matrice $B \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ non nulla tale che $AB = 0$.

Corso di laurea Ingegneria: ____________________ **Scelta turno orale:**____________________