Scritto di Geometria per Ingegneria

Sessione Invernale — Anno Accademico 2002–2003 — 8 Gennaio 2003

Cognome: Nome: Matricola: Immatricolato nel

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su foglio che consegnerai devi scrivere, in nome, cognome e numero di matricola. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio).

Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma sui fogli protocollo a quadretti che hai debitamente portato con te. Dev'essere chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (e s'intende che due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere non basta rispondere "Si" o "No". Se ritieni che l'affermazione proposta sia sempre vera (o sempre falsa), devi spiegare perchè; se invece pensi sia talvolta falsa (o talvolta vera), devi indicare un esempio concreto in cui lo è.

a

1. Sia V uno spazio vettoriale reale e siano v_1, v_2, v_3 vettori di V. È sempre vero che

$$\mathrm{Span}\,(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Span}\,(v_1 + v_2, v_1 - v_3, (a-4)v_1 + 2v_2 + av_3)?$$

2. Il sistema $\begin{cases} x_1 + (a-6)x_2 = 3, \\ x_1 + 2x_2 = 4, \end{cases}$ è compatibile? se lo è, trovane le soluzioni?

3. Le matrici $A = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & a-6 \end{vmatrix}$ e $B = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ sono congruenti?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Data la matrice

$$A_k = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R})$$

(i) al variare di $k \in \mathbb{R}$, trova autovalori e autovettori di A_k

(ii) stabilisci per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile,

(iii) per i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile, trova una base che la diagonalizza.

B. Fissato un sistema di riferimento cartesiano $RC(O, A_1, A_2, A_3)$ in $\mathcal{E}^3$,

(i) verifica che le rette r di equazioni cartesiane $x - (a-4)y + 2z = 3$, $x + y - 2z = 5$ ed s di equazioni parametriche $x = t + 1$, $y = a + 3t$, $z = 1 - at$ sono sghembe;

(ii) calcola la distanza tra r ed s;

(iii) determina equazioni parametriche e cartesiane della retta ρ perpendicolare a r ed s e incidente a entrambe

(iv) dato il piano π_k di equazione $x + ky - (a-5)z = 3$ determina al variare di k la posizione reciproca di π_k e ρ.

C. Considera i sottospazi vettoriali S e T di $\mathbb{R}^4$ dati rispettivamente da

$$S = \mathrm{Span}\,(e_1 + ae_3 - e_4, e_1 - e_2, ae_1 - e_3 + e_4)\,, \quad T = \mathrm{Span}\,(e_1 - e_2 + ae_3, e_1 + e_4, e_2 - 3e_3 + e_4)\,,$$

(i) trova dimensione di S e T;

(ii) esibisci una base di $S + T$ e una di $S \cap T$;

(iii) completa la base di $S \cap T$ di cui al punto (ii) ad una base di $\mathbb{R}^4$.
