Scritto di Geometria per Ingegneria

Sessione Autunnale — Anno Accademico 2001–2002 — 10 Dicembre 2001

Cognome: Nome: Matricola: Immatricolato nel

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su foglio che consegnerai devi scrivere, in nome, cognome e numero di matricola. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio).

Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma sui fogli protocollo a quadretti che hai debitamente portato con te. Dev'essere chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (e s'intende che due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere non basta rispondere "Si" o "No". Se ritieni che l'affermazione proposta sia sempre vera (o sempre falsa), devi spiegare perchè; se invece pensi sia talvolta falsa (o talvolta vera), devi indicare un esempio concreto in cui lo è.

a

1. Il sistema lineare $\begin{cases} x+y=2, \\ x-y=a, \end{cases}$ ammette soluzioni intere?

2. È vero che le matrici $\begin{vmatrix} 0 & -7 & 2 \\ 2a & -1 & 3 \\ -1 & a-2 & 1 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} 0 & -7 & 2 \\ a+2 & -1 & 3 \\ a-1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ sono simili?

3. Sia $A \in GL_m(\mathbb{R})$ una matrice invertibile, e $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ una matrice qualunque. È vero che $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(B)$?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Fissato un sistema di riferimento cartesiano $RC(O, A_1, A_2, A_3)$ in $\mathcal{E}^3$,

(i) scrivi equazioni parametriche e cartesiane per la retta r passante per i punti P_0 e P_1 aventi coordinate rispettivamente $(-1, a, 2)$ e $(1, 0, a)$;

(ii) trova il piano π contenente r e parallelo alla retta ρ di equazioni cartesiane $x_1 + x_2 - 2x_3 = a - 2$, $x_1 - 3x_2 + 2x_3 = a$,

(iii) calcola la distanza del punto $P_2 = (1, a, 4)$ da π.

(iv) calcola l'angolo compreso tra π e la retta s di equazioni parametriche $x_1 = t + 1$, $x_2 = 3t + a$, $x_3 = at - 2$.

B. Fissato un vettore $u \in \mathbb{R}^3$ di norma unitaria rispetto al prodotto scalare canonico, sia $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ la matrice data da $A = I_3 - 2u^T u$, dove ${}^T u$ indica il trasposto del vettore u.

(i) Verifica che la matrice A è ortogonale;

(ii) verifica che u è un autovettore di A relativo all'autovalore -1 e che ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ ortogonale a u è un autovettore di A relativo all'autovalore 1;

(iii) dimostra che A è diagonalizzabile e calcolane il determinante di A.

C. Dati i vettori

$$v_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \; v_2 = \begin{vmatrix} 2 \\ a+1 \\ 1 \end{vmatrix}, \; v_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

(i) verifica che formano una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$;

(ii) trova la matrice che rappresenta il cambiamento di base dalla base canonica di $\mathbb{R}^3$ a $\mathcal{C}$;

(iii) scrivi la matrice che rappresenta, nella base canonica, l'endomorfismo $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avente come autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$ con relativi autospazi dati da

$$V_1 = \mathrm{Span}\,(v_1, v_2) \qquad \text{e} \qquad V_{-2} = \mathrm{Span}\,(v_3)\,.$$
