Scritto di Geometria. Anno Accademico 2009–2010. 20 Gennaio 2010

Cognome:_______________ Nome:_______________ Matricola:__________ Immatricolato nel ________

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su **ogni** *foglio che consegnerai devi scrivere, in* **stampatello,** *nome, cognome e numero di matricola. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio).*

Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma sui fogli protocollo a quadretti che hai debitamente portato con te. Dev'essere **ben** *chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.*

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se **più di una** *risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (e s'intende che due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere* **giustificate:** *non basta rispondere "Si" o "No". Se ritieni che l'affermazione proposta sia sempre vera (o sempre falsa), devi spiegare perchè; se invece pensi sia talvolta falsa (o talvolta vera), devi indicare un esempio concreto in cui lo è.*

Indica con a l'ultima cifra del tuo numero di matricola.

1. Esistono $k, h \in \mathbb{R}$ con $h \neq 0$ tali che $\begin{vmatrix} k+a+3 & h \\ -h & k+a+3 \end{vmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ sia diagonalizzabile?

2. Se A è una matrice invertibile a coefficienti interi, è sempre vero che A^{-1} è a coefficienti interi?

3. Esiste un prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $\langle e_3, e_3\rangle = 0$, $\langle e_3, e_2\rangle = \langle e_3, 2e_2 - e_1\rangle = a+1$?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Considera l'endomorfismo $T : \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}_3[t]$ data da $T(p(t)) = p(3t+1) - p(t-2)$.

(i) Verifica che T è lineare.

(ii) Scrivi la matrice associata a T rispetto ad una base a tua scelta.

(iii) Trova nucleo e immagine di T.

(iv) Determina autovalori e autovettori di T.

(v) Stabilisci se T sia diagonalizzabile o meno.

B. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considera il polinomio

$$P_k(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + (k+1)x_2^2 + 2(a+1)x_1x_3 - 2x_3^2 + 2x_1 + 6x_2 - 2(k-1)x_3 + a - 4.$$

(i) Trova i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la quadrica associata a $P_k(x)$ è non degenere.

(ii) Trova i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la quadrica associata a $P_k(x)$ è un paraboloide.

(iii) Per $k = 0$, determina la forma canonica affine della quadrica associata a $P_k(x)$.

C. Al variare dei parametri $k, h \in \mathbb{C}$ studia il seguente sistema lineare e, quando possibile, determinane le soluzioni:

$$\begin{cases} (k+1)x + 4(k+1)y + (2k+3)z = k+3, \\ kx + (4k+1)y + 2(k+1)z = k+2, \\ x + (k+4)y + (2a+1)z = h+2. \end{cases}$$

Corso di laurea Ingegneria: ____________________ **Scelta turno orale:**____________________