Scritto di Geometria per Ingegneria

Sessione Estiva — Anno Accademico 2002–2003 — 11 Dicembre 2002

Cognome: Nome: Data di nascita: Matricola:

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su foglio che consegnerai devi scrivere, in nome, cognome e numero di matricola. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio).

Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma sui fogli protocollo a quadretti che hai debitamente portato con te. Dev'essere chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (e s'intende che due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere non basta rispondere "Si" o "No". Se ritieni che l'affermazione proposta sia sempre vera (o sempre falsa), devi spiegare perchè; se invece pensi sia talvolta falsa (o talvolta vera), devi indicare un esempio concreto in cui lo è.

a

1. Siano $A \in \mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ ed S una sua riduzione a scala. È sempre vero che $p_A(\lambda) = p_S(\lambda)$?

2. Trova la distanza del piano π di equazione $x - 2ay - z = 4$ dal punto P di coordinate $(1, a-4, 2)$.

3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 e siano $v_1, v_2, v_3 \in V$ generatori di V. È sempre vero che essi costituiscono una base di V?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ studia il seguente sistema lineare e quando possibile trovane le soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + (k-2)x_3 = a - 6, \\ -x_1 + x_2 + (a-5)x_3 = 2. \end{cases}$$

B. Data la matrice $A = \begin{vmatrix} 1 & a-3 \\ a-4 & 6 \end{vmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ considera l'applicazione $T : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ data da $T(X) = AX + XA^2$.

(i) Dimostra che T è lineare;

(ii) scrivi la matrice associata a T rispetto ad una base di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ a tua scelta;

(iii) determina nucleo e immagine di T;

(iv) esiste una matrice Y_1 appartenente a $\mathrm{Im}T$ che sia invertibile?

(v) esiste una matrice Y_2 appartenente a $\mathrm{Ker}T$ che sia invertibile?

C. Posto $W = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 2(a-4)x_2 = 0, x_3 - (a-6)x_4 = 0\}$

(i) trova una base ortonormale di W,

(ii) completala ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$,

(iii) scrivi esplicitamente la proiezione ortogonale P_W su W,

(iv) verifica che $P_W^2 = P_W$.
