Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Corso di Analisi Numerica

7 - CALCOLO NUMERICO CON MATRICI

Lucio Demeio
Dipartimento di Scienze Matematiche

1. Richiami di algebra delle matrici

Richiami teorici

Operazioni fondamentali

- Siano $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ e $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$ due matrici di dimensioni $m \times n$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono **uguali** se $a_{ij} = b_{ij}$ per ogni i, j;
- la **somma** delle due matrici, indicata con $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, è la matrice i cui elementi sono $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$;
- la **moltiplicazione di una matrice per uno scalare** è definita come $\mathbf{C} = \lambda\mathbf{A}$ con $c_{ij} = \lambda\, a_{ij}$;
- Siano ora $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ una matrice $m \times p$ e $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$ una matrice $p \times n$; il **prodotto righe per colonne** è definito come $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, con $c_{ij} = \sum_{l=1,p} a_{il} b_{lj}$ ed è una matrice $m \times n$. Questa operazione è definita solo se la seconda dimensione di $\mathbf{A}$ e la prima dimensione di $\mathbf{B}$ sono uguali.

Richiami teorici

Operazioni fondamentali

- Se $m = n$ una matrice si dice **quadrata**; gli elementi del tipo a_{ij} con $i = j$ sono detti elmenti diagonali e costituiscono la **diagonale** (principale); una matrice è detta **diagonale** se gli unici elementi diversi da zero sono sulla diagonale: $a_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$. La matrice diagonale data da $a_{ij} = \delta_{ij}$ è detta **matrice identità** e viene di solito indicata con $\mathbf{I_n}$.
- Una matrice viene detta **triangolare superiore** se tutti gli elmenti sotto la diagonale principale sono nulli, cioè $a_{ij} = 0$ per $i > j$; viene detta **triangolare inferiore** se tutti gli elmenti sopra la diagonale principale sono nulli, cioè $a_{ij} = 0$ per $i < j$.
- Ricordiamo inoltre, senza dimostrarle, le seguenti proprietà: $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$, $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{BC}$, $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$, $\lambda(\mathbf{AB}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})$ ma ... $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, cioè il prodotto fra matrici non è commutativo.
- Se $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ si diche che $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ **commutano**.

Richiami teorici

Matrice inversa

- Una matrice quadrata $\mathbf{A}$ $n \times n$ si dice **invertibile** (o non singolare) se esiste una matrice $\mathbf{A}^{-1}$ di dimensione $n \times n$ tale che $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I_n}$.
- Se $\mathbf{A}$ è invertibile, allora si ha che: $\mathbf{A}^{-1}$ è unica; $\mathbf{A}^{-1}$ è invertibile e $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$. Se $\mathbf{B}$ è pure invertibile, abbiamo $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

Soluzione di un sistema

Dato un sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ di n equazioni in n incognite, se $\mathbf{A}$ è invertibile e se conosciamo $\mathbf{A}^{-1}$, allora la soluzione del sistema si trova facilmente, $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Di fatto, il calcolo della matrice inversa è spesso un'operazione computazionalmente onerosa e quindi non conviene. Tuttavia, è utile vedere un algoritmo per il calcolo della matrice inversa.

Richiami teorici

Matrice inversa

- Cominciamo con l'osservazione che, se $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$, e se indichiamo con $\mathbf{C}_j$ e con $\mathbf{B}_j$ le j-esime colonne rispettivamente di $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$, allora si ha che $\mathbf{AB}_j = \mathbf{C}_j$.
- Questo vuol dire che si possono risolvere simultaneamente n sistemi lineari aventi gli stessi coefficienti, ma con termini noti diversi, costruendo una matrice orlata ampliata al modo seguente:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

  dove

$$\mathbf{AX}_j = \mathbf{B}_j$$

  è uno dei sistemi ed è dello stesso "tipo" di quelli studiati finora.
- **Mathematica file Matrici1.nb**

Richiami teorici

Matrice inversa

- La determinazione dell'inversa $\mathbf{A}^{-1}$ di una matrice $\mathbf{A}$ può allora essere vista come un insieme di n sistemi lineari in cui le incognite sono le colonne di $\mathbf{A}^{-1}$.
- Siccome $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I_n}$, dobbiamo risolvere una collezione di sistemi del tipo indicato sopra,

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$$

  con $\mathbf{B}_j$ il vettore colonna avente 1 al j-esimo posto e 0 altrove, mentre $\mathbf{X}_j$ è la j-esima colonna (incognita) della matrice inversa.
- **Mathematica file Matrici1.nb**

Richiami teorici

Matrice trasposta

La matrice che si ottiene da una matrice $\mathbf{A}$ per scambio delle righe con le colonne viene detta **matrice trasposta** di $\mathbf{A}$, indicata con $\tilde{\mathbf{A}}$ oppure con $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$

- Se $\mathbf{A}$ è $m \times n$ allora $\tilde{\mathbf{A}}$ è $n \times m$;
- $\tilde{\tilde{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}$;
- Se $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}}$ la matrice si dice **simmetrica**;
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{B}}$;
- $(\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \tilde{\mathbf{B}}\,\tilde{\mathbf{A}}$;
- se $\mathbf{A}^{-1}$ esiste, allora $(\mathbf{A}^{-1})^T = (\tilde{\mathbf{A}})^{-1}$.

Richiami teorici

Il determinante di una matrice

Il determinante di una matrice $\mathbf{A}$ di dimensione $n \times n$, indicato indifferentemente con $det(\mathbf{A})$ o con $|\mathbf{A}|$, è un numero definito per ricorrenza al modo seguente.

- Se $n = 1$ allora $|\mathbf{A}| = a_{11}$;
- Se $n = 2$ allora $|\mathbf{A}| = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$;
- se $n > 1$, si chiama **minore** M_{ij} il determinante della sottomatrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ cancellando la riga i-esima e la colonna j-esima;
- il **complemento algebrico** A_{ij} dell'elemento a_{ij} è definito come $A_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij}$;
- ...

Richiami teorici

Il determinante di una matrice

- ...
- scelta una riga qualsiasi, ad esempio la riga i-esima, il determinante di $\mathbf{A}$ è dato da

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, A_{ij}$$

  e si può dimostrare che il risultato è indipendente dalla scelta della riga;
- alternativamente, scelta una colonna qualsiasi, ad esempio la colonna j-esima, il determinante di $\mathbf{A}$ è dato da

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, A_{ij}$$

  e si può dimostare che il risultato è indipendente dalla scelta della colonna.

Richiami teorici

Il determinante di una matrice

- Che il risultato sia indipendente dalla scelta della riga (o colonna), può essere usato per minimizzare il numero di operazioni richieste. Ad esempio, se

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 6 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & -5 & -1 \\ 3 & -4 & 9 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & -7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

  è evidente che conviene effettuare il calcolo secondo gli elementi dell'ultima colonna.
- **Mathematica file Matrici2.nb**

Richiami teorici

Proprietà del determinante

- Se tutti gli elementi di una riga (o colonna) sono nulli, $|\mathbf{A}| = 0$;
- se $\mathbf{A}'$ è ottenuta da $\mathbf{A}$ moltiplicando tutti gli elementi di una riga (o colonna) per una costante reale λ, allora $|\mathbf{A}'| = \lambda\,|\mathbf{A}|$;
- se $\mathbf{A}'$ è ottenuta da $\mathbf{A}$ aggiungendo ad una riga (o colonna) un multiplo di un'altra riga (o colonna), $|\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}|$;
- se $\mathbf{A}'$ è ottenuta da $\mathbf{A}$ mediante una permutazione di righe (o colonne), $|\mathbf{A}'| = (-1)^p\,|\mathbf{A}|$, dove p è la parità della permutazione;
- se $\mathbf{A}'$ è ottenuta da $\mathbf{A}$ mediante uno scambio di righe (o colonne), $|\mathbf{A}'| = -\,|\mathbf{A}|$;
- se due righe (o colonne) di $\mathbf{A}$ sono uguali, allora $|\mathbf{A}| = 0$;
- se $\mathbf{A}^{-1}$ esiste, allora $|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}$;
- $|\tilde{\mathbf{A}}| = |\mathbf{A}|$;
- se $\mathbf{A}$ è una matrice triangolare (superiore o inferiore) o diagonale, allora $|\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.
- $det(\mathbf{AB}) = det(\mathbf{A})\,det(\mathbf{B})$.

Richiami teorici

Matrici e sistemi lineari

Sia $\mathbf{A}$ una qualsiasi matrice $n \times n$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- $|\mathbf{A}| \neq 0$;
- $\mathbf{A}^{-1}$ esiste, cioè $\mathbf{A}$ è invertibile;
- il sistema $\mathbf{Ax} = 0$ ammette l'unica soluzione $\mathbf{x} = 0$ (soluzione nulla o banale);
- il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ha un'unica soluzione per ogni $\mathbf{b}$;
- l'eliminazione gaussiana con scambio di righe può essere eseguita (con successo) sul sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ per ogni $\mathbf{b}$.

Fattorizzazione delle matrici

Esistono diversi modi di fattorizzare una matrice $\mathbf{A}$, cioè di scriverla nella forma $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$, con $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ aventi determinate proprietà. Qui vedremo soltanto la fattorizzazione detta LU, che permette di scrivere una matrice come prodotto di una matrice triangolare inferiore per una triangolare superiore. A tale fine si sfrutta l'eliminazione gaussiana.

Theorem (Fattorizzazione LU)

Sia $\mathbf{A}$ la matrice dei coefficienti di un sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ per il quale si può eseguire l'eliminazione gaussiana senza scambi di righe. Allora esistono due matrici $\mathbf{L}$ ed $\mathbf{U}$, rispettivamente triangolare inferiore e triangolare superiore, tali che $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$

Fattorizzazione LU

Proof.

In primo passo dell'eliminazione gaussiana consiste nel sostituire alla matrice $\mathbf{A}$ la matrice $\mathbf{A^{(2)}}$ i cui elementi sotto la diagonale della prima colonna sono nulli. Tale risultato si ottiene con l'operazione $R_j - m_{j1}\, R_1 \to R_j$. È facile vedere che ciò è equivalente a moltiplicare la matrice $\mathbf{A^{(1)}} \equiv \mathbf{A}$ con la matrice

$$\mathbf{M^{(1)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ -m_{21} & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 0 \\ -m_{n1} & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

dove $m_{j1} = a_{j1}^{(1)}/a_{11}^{(1)}$. Riassumendo, il primo passo dell'eliminazione gaussiana può essere scritto come
$\mathbf{A^{(2)}}\,\mathbf{x} \equiv \mathbf{M^{(1)}}\,\mathbf{A^{(1)}}\,\mathbf{x} = \mathbf{M^{(1)}}\,\mathbf{b} \equiv \mathbf{b^{(2)}}$, con $\mathbf{b^{(1)}} = \mathbf{b}$. I passi successivi possono essere descritti in modo analogo, con il passo generico dato da $\mathbf{A^{(k+1)}}\,\mathbf{x} \equiv \mathbf{M^{(k)}}\,\mathbf{A^{(k)}}\,\mathbf{x} = \mathbf{M^{(k)}}\,\mathbf{b^{(k)}} \equiv \mathbf{b^{(k+1)}} \equiv \mathbf{M^{(k)}}\mathbf{M^{(k-1)}}...\mathbf{M^{(1)}}\,\mathbf{b}$ $\square$

Fattorizzazione *LU*

Il processo si arresta quando $\mathbf{A^{(n)}}$ è una matrice triangolare superiore, che allora è della forma

$$\mathbf{A^{(n)}} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & ... & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & ... & a_{2n}^{(2)} \\ ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}$$

che fornisce quindi la parte triangolare superiore della fattorizzazione LU della matrice $\mathbf{A}$, quindi $\mathbf{U} = \mathbf{A^{(n)}}$, che può essere espressa come azione del prodotto delle $\mathbf{M^{(k)}}$ su $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{U} = \mathbf{A^{(n)}} = \mathbf{M^{(n-1)}}\,\mathbf{M^{(n-2)}}\,...\,\mathbf{M^{(1)}}\,\mathbf{A}$$

dove le $\mathbf{M^{(k)}}$ sono date da

Fattorizzazione *LU*

$$\mathbf{M^{(k)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & -m_{k+1,k} & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & -m_{k+2,k} & 1 & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & -m_{nk} & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Inoltre, la matrice $\mathbf{A}$ si ottiene invertendo la relazione della pagina precedente, cioè

$$\mathbf{A} = \mathbf{M^{(1)}}^{-1}\,\mathbf{M^{(2)}}^{-1} \ldots \mathbf{M^{(n-1)}}^{-1}\,\mathbf{U} \equiv \mathbf{L}\,\mathbf{U}$$

È facile notare che

Fattorizzazione *LU*

- $$\mathbf{M}^{(\mathbf{k})^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & m_{k+1,k} & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & m_{k+2,k} & 1 & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & m_{nk} & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$
- e che
  $$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ m_{21} & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 0 \\ m_{n1} & ... & m_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$
- **Mathematica file Matrici3.nb**

Fattorizzazione *LU*

Fattorizzazione con scambi di righe

- Matrici di permutazione: $\mathbf{P}$, $n \times n$, ottenuta dalla matrice identità per scambi di righe. Ad esempio, le matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  scambiano rispettivamente le righe di una matrice 2×2 e la prima con la seconda riga di una matrice 3×3.

- Se $\mathbf{A}$ è riconducibile ad una matrice triangolare superiore mediante eliminazione gaussiana con scambio di righe, allora esiste una matrice di permutazione $\mathbf{P}$ tale che la matrice $\mathbf{PA}$ è riconducibile ad una matrice triangolare superiore mediante eliminazione gaussiana senza scambio di righe.
- Dunque $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$, pertanto $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{LU}$, dove $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^{-1}$, con $\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{L}$ non necessariamente triangolare inferiore.
- **Mathematica file Matrici3.nb**

Fattorizzazione *LU*

Fattorizzazione LU e sistemi lineari

- Una volta fattorizzata la matrice $\mathbf{A}$ con $\mathbf{A} = \mathbf{L}\,\mathbf{U}$, si può utilizzare la matrice fattorizzata per risolvere più facilmente sistemi lineari.
- Infatti

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b}, & \qquad \mathbf{L}\mathbf{U}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{U}\mathbf{x} &\equiv \mathbf{y}, & \qquad \mathbf{L}\mathbf{y} &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

  dove l'ultimo sistema si può risolvere per sostituzione in avanti, perchè $\mathbf{L}$ è triangolare inferiore.
- Quindi, trovata la soluzione per $\mathbf{y}$, il sistema

$$\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

  può essere risolto con la sostituzione all'indietro.
- **Mathematica file Matrici3.nb**

Matrici notevoli

Matrici a dominanza diagonale

Una matrice $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ si dice **a dominanza diagonale stretta** se

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \qquad \forall i = 1, ..., n$$

Per esempio, date

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}$ è a dominanza diagonale stretta, mentre $\mathbf{B}$ non lo è. Attenzione: $\tilde{\mathbf{A}}$ NON è a dominanza diagonale stretta (perchè $\tilde{\mathbf{A}}$ sia a dominanza diagonale stretta, $\mathbf{A}$ dovrebbe essere a dominanza diagonale stretta sia per righe che per colonne).

Matrici notevoli

Theorem (Matrici a dominanza diagonale)

Sia $\mathbf{A}$ una matrice a dominanza diagonale stretta. Allora $\mathbf{A}$ è invertibile ed il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è risolvibile mediante eliminazione gaussiana senza scambio di righe (o colonne) ed è stabile rispetto alla crescita degli errori di arrotondamento.

Dimostrazione

Dimostriamo per assurdo l'invertibilità. Supponiamo che il sistema omogeneo $\mathbf{Ax} = 0$ ammetta una soluzione non nulla $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$. Sia x_k la componente più grande, in valore assoluto, di tale soluzione: $0 < |x_k| = \max_{1 \le j \le n} |x_j|$. Siccome $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = 0$ per ogni $i = 1, 2, ..., n$, quando $i = k$ abbiamo che

$$a_{kk}\, x_k = -\sum_{j \neq k} a_{kj}\, x_j \quad \text{il che implica} \quad |a_{kk}|\,|x_k| \le \sum_{j \neq k} |a_{kj}|\,|x_j|$$

Matrici notevoli

Dimostrazione (fine)

o anche

$$|a_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}| \frac{|x_j|}{|x_k|} \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}|,$$

che contraddice la dominanza diagonale stretta di $\mathbf{A}$. Dunque il sistema omogeneo $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ ammette soltanto la soluzione nulla e la matrice $\mathbf{A}$ è invertibile.
Omettiamo la dimostrazione della restante parte del teorema.

Matrici notevoli

Matrici definite positive

Una matrice $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ si dice **definita positiva** se è simmetrica e se

$$\mathbf{x^T}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x} \equiv < \mathbf{x}^T, \mathbf{A}\,\mathbf{x} > \equiv (\mathbf{x}^T, \mathbf{A}\,\mathbf{x}) > 0$$

$\forall \mathbf{x} \neq 0 \in \mathbb{R}^n$.

Esempio

La matrice $\mathbf{A}$ 2×2 data da

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

è definita positiva. Infatti, se $\mathbf{x}^T = (x1, x2)$, si ha
$\mathbf{x^T}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x} = 9\,x_1^2 + 4\,x_2^2 + 6\,x_1\,x_2 \geq 0$, con l'uguaglianza solo se
$x_1 = x_2 = 0$ (verificare per esercizio !!).

Matrici notevoli

Theorem (Matrici definite positive)

Sia $\mathbf{A}$ *una matrice quadrata di dimensione* n *definita positiva. Allora:*

(a) $\mathbf{A}$ *è invertibile;*

(b) $a_{ii} > 0$ *per ogni* $i = 1, 2, ..., n$*;*

(c) $\max_{1 \le k,j \le n} |a_{kj}| \le \max_{1 \le i \le n} |a_{ii}|$*;*

(d) $a_{ij}^2 < a_{ii} a_{jj}$ *per ogni* $i \ne j$.

Dimostrazione

(a) Il sistema omogeneo $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ ammette solo la soluzione nulla (altrimenti avremmo $\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x} = 0$ con $\mathbf{x} \ne 0$) e quindi $\mathbf{A}$ è invertibile;

(b) Per ogni $i = 1, 2, ..., n$, basta considerare il vettore $\mathbf{x} = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ con $x_i = 1$ ed $x_j = 0$ per $j \ne i$. Allora $0 < \mathbf{x}^{\mathbf{T}}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x} = a_{ii}$;

Matrici notevoli

Dimostrazione (cont.)

(c) fissiamo due interi $j \neq k$ con $1 \leq j, k \leq n$; consideriamo i vettori $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ e $\mathbf{z} = (z_1, ..., z_n)$ dati da: $x_i = 0$ se $i \neq j$ e $i \neq k$; $x_i = 1$ se $i = j$ e $x_i = -1$ se $i = k$; $z_i = 0$ se $i \neq j$ e $i \neq k$; $z_i = 1$ se $i = j$ o $i = k$; cioè, ad esempio, se $j = 1$ e $k = 3$, $\mathbf{x} = (1, 0, -1, 0, \dots 0)$ e $\mathbf{z} = (1, 0, 1, 0, \dots 0)$. Con due passaggi, si vede che

$$0 < \mathbf{x}^{\mathbf{T}}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x} = a_{jj} + a_{kk} - 2\,a_{kj}$$
$$0 < \mathbf{z}^{\mathbf{T}}\,\mathbf{A}\,\mathbf{z} = a_{jj} + a_{kk} + 2\,a_{kj}$$

da cui segue facilmente che $|a_{kj}| < (a_{jj} + a_{kk})/2 \leq \max_{1 \leq i \leq n} a_{ii}$, da cui la tesi;

(d) fissiamo $i \neq j$ con $1 \leq i, j \leq n$, sia ora $\mathbf{x}$ tale che $x_k = 0$ se $k \neq j$ e $k \neq i$; $x_k = \alpha$ se $k = i$ e $x_k = 1$ se $k = j$, con α reale arbitrario; con due passaggi, si vede che $0 < \mathbf{x}^{\mathbf{T}}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x} = a_{ii}\alpha^2 + 2\,a_{ij}\alpha + a_{jj}$ che è un polinomio di secondo grado in α privo di radici reali; la condizione che il discriminante sia negativo offre la tesi.

Matrici notevoli

Sottomatrici principali

Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata di dimensione n. Una sottomatrice quadrata di $\mathbf{A}$ i cui elementi diagonali sono anche elementi diagonali di $\mathbf{A}$ si chiama **sottomatrice principale** di $\mathbf{A}$. Per esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -3 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Una sottomatrice costituita dalle prime k righe e prime k colonne di $\mathbf{A}$ si chiama **sottomatrice principale di guida** di $\mathbf{A}$.

Theorem (Sottomatrici principali)

Una matrice simmetrica $\mathbf{A}$ *è definita positiva se e solo se tutte le sue sottomatrici principali di guida hanno determinante positivo.*

Matrici notevoli

Matrici sparse

Una matrice con **molti** elementi nulli e **pochi** elementi diversi da zero si dice **sparsa**.Esempio:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il vantaggio di operare con matrici sparse è evidente: il risparmio computazionale che deriva dalla presenza degli zeri è spesso molto grande. Attenzione però: alcune operazioni vanificano tali vantaggi; ad esempio, l'inversa di una matrice sparsa è quasi sempre una matrice piena. I vantaggi delle matrici sparse si riscontrano soprattutto nell'uso dei metodi iterativi.

Matrici notevoli

Matrici a bande

Una matrice sparsa i cui unici elementi diversi da zero sono sulla diagonale principale e su alcune sotto- o sopra-diagonali adiacenti alla diagonale principale si dice **matrice a bande**. Esempio:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Più precisamente, una matrice $\mathbf{A}$ si dice a bande quando esistono due interi $p > 1$ e $q < n$ tali che $a_{ij} = 0$ quando $j < i - p$ o $j > i + q$. L'intero $p + q + 1$ si chiama **larghezza della banda**. Nell'esempio mostrato sopra la larghezza è 3 e la struttura a bande è simmetrica rispetto alla diagonale principale, ma in generale non è detto che sia così.

Matrici notevoli

Matrici tridiagonali

Una matrice a bande con $p = q = 1$ si dice **matrice tridiagonale**, poichè gli unici elementi diversi da zero sono quelli sulla diagonale principale e sulle due diagonali secondarie adiacenti.

In generale:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & ... & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

L'esempio visto prima rappresenta una matrice tridiagonale.

Matrici notevoli

Fattorizzazione delle matrici tridiagonali

La fattorizzazione LU delle matrici tridiagonali è particolarmente semplice. I fattori $\mathbf{L}$ ed $\mathbf{U}$ si possono cercare nella forma

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & ... & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{pmatrix} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & ... & u_{n-1,n} \\ 0 & ... & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & ... & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrici notevoli

Algoritmo di Crout

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & \dots & \dots & \dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn}
\end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{pmatrix}
l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\
0 & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & l_{i,i-1} & l_{ii} & \dots & 0 \\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & \dots & \dots & l_{n,n-1} & l_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & u_{12} & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & u_{23} & \dots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 1 & u_{i,i+1} & 0 \\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & \dots & \dots & 1 & u_{n-1,n} \\
0 & \dots & \dots & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

$l_{11} = a_{11}$

$l_{11}\, u_{12} = a_{12}$

$\dots$

$l_{n,n-1}\, u_{n-1,n} + l_{nn} = a_{nn}$

$l_{n,n-1} = a_{n,n-1}$

$l_{11} = a_{11}$

$l_{i,i-1} = a_{i,i-1}$

$l_{ii} = a_{ii} - l_{i,i-1}\, u_{i-1,i}$

$u_{i,i+1} = a_{i,i+1}/l_{ii}$

$i = 2, \dots, n-1$

Matrici tridiagonali

Algoritmo di Crout

- $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{LUx} = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{y} \equiv \mathbf{Ux}, \qquad \mathbf{Ly} = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{Ux} = \mathbf{y}$
- $$\mathbf{Ly} = \mathbf{b} : \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & l_{i,i-1} & l_{ii} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_i \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_i \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$
- $$y_1 = b_1/l_{11}$$
  $$y_2 = (b_2 - l_{21}\, y_1)/l_{22}$$
  $$y_i = (b_i - l_{i,i-1}\, y_{i-1})/l_{ii}$$
  $$y_n = (b_n - l_{n,n-1}\, y_{n-1})/l_{nn}$$

Matrici tridiagonali

Algoritmo di Crout

- $$\mathbf{Ux} = \mathbf{y} : \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & u_{i,i+1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & u_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_i \\ \dots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

- $$x_n = y_n$$
  $$x_{n-1} = y_{n-1} - u_{n-1,n}\, x_n$$
  $$x_{i-1} = y_{i-1} - u_{i-1,i}\, x_i$$
  $$x_1 = y_1 - u_{12}\, x_2$$

Matrici tridiagonali

Algoritmo di Crout - Riepilogo

$$
\begin{aligned}
&l_{11} = a_{11} \\
&u_{12} = a_{12}/l_{11} \\
&y_1 = b_1/l_{11} \\[1em]
&l_{i,i-1} = a_{i,i-1} \\
&l_{ii} = a_{ii} - l_{i,i-1}\, u_{i-1,i} \\
&u_{i,i+1} = a_{i,i+1}/l_{ii} \\
&y_i = (b_i - l_{i,i-1}\, y_{i-1})/l_{ii} \\
&i = 2, \ldots, n-1 \\[1em]
&y_n = (b_n - l_{n,n-1}\, y_{n-1})/l_{nn} \\[1em]
&x_n = y_n \\
&x_{n-1} = y_{n-1} - u_{n-1,n}\, x_n \\
&x_{i-1} = y_{i-1} - u_{i-1,i}\, x_i \\
&x_1 = y_1 - u_{12}\, x_2
\end{aligned}
$$

Algoritmo di Crout

Mathematica file Matrici4.nb