

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Corso di Analisi Numerica
5 - INTEGRAZIONE NUMERICA

Lucio Demeio
Dipartimento di Scienze Matematiche

- 1 Integrazione numerica: formule di Newton-Cotes semplici
- 2 Formule di Newton-Cotes composte
- 3 Metodo di Romberg

Introduzione

Idea di base

- Spesso si devono calcolare integrali del tipo

$$\int_a^b f(x) dx$$

quando non si conosce una primitiva della f o la f stessa è nota solo su un insieme discreto di punti (nodi).

- L'integrale viene allora approssimato, con varie tecniche e varie metodologie, da opportune somme di Riemann, del tipo

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n w_i f(x_i).$$

accompagnate da una stima dell'errore.

- Le formule che si ottengono si chiamano **formule** (o regole) **di quadratura**.

Formule di Newton-Cotes

Regola dei trapezi

La metodologia che illustreremo è quella di utilizzare il polinomio interpolatore di Lagrange con un numero adeguato di nodi. Iniziamo con il caso più elementare, con **2** nodi, $x_0 = a$ ed $x_1 = b$. Il polinomio interpolatore con resto è in tal caso

$$f(x) = f(x_0) \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2} f''(\xi(x))$$

ed integrando si ottiene, dopo qualche passaggio,

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

dove $h = x_1 - x_0 = b - a$ e l'ultimo termine è stato ottenuto applicando il teorema della media pesata sull'integrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2} f''(\xi(x)) dx$$

Formule di Newton-Cotes

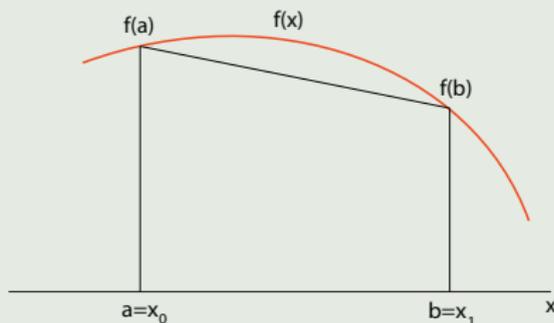
Regola dei trapezi

L'approssimazione ottenuta per questa via è dunque

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)]$$

che viene detta **regola del trapezio**, in quanto consiste nel sostituire l'area vera sottesa dalla curva con il trapezio in figura.

Formula dei trapezi



Formule di Newton-Cotes

Regola di Simpson

- L'approssimazione successiva si ha utilizzando **3** nodi, con $x_0 = a$, $x_1 = (a + b)/2$ ed $x_2 = b$. In tal caso è conveniente, invece di seguire la strada del polinomio interpolatore di Lagrange, di sviluppare $f(x)$ con il polinomio di Taylor al terz'ordine attorno ad x_1 .
- Abbiamo allora:

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + \frac{f''(x_1)}{2} (x - x_1)^2 + \frac{f'''(x_1)}{6} (x - x_1)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{24} (x - x_1)^4$$

dove $\xi(x) \in (x_0, x_2)$.

- Integrando questa espressione, applicando il teorema della media pesata sull'ultimo termine ...

Formule di Newton-Cotes

Regola di Simpson

- ... notando che

$$\int_{x_0}^{x_2} (x - x_1) dx = \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)^3 dx = 0$$

- ed utilizzando per la derivata seconda l'approssimazione

$$f''(x_1) = \frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$$

- abbiamo, dopo qualche semplice passaggio,

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

Formule di Newton-Cotes

Regola di Simpson

L'approssimazione ottenuta per questa via è dunque

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

che viene detta **regola di Simpson**.

Formule di Newton-Cotes

Grado di accuratezza

- Nella regola dei trapezi, l'errore è proporzionale alla derivata seconda, quindi la regola dei trapezi è esatta per polinomi di grado zero e grado uno;
- Nella regola di Simpson, l'errore è proporzionale alla derivata quarta, quindi la regola è esatta per polinomi fino al terzo grado.
- Il **grado di accuratezza** di una formula di quadratura è il grado del polinomio di grado massimo per cui la formula è esatta. La regola dei trapezi ha grado di precisione uno, la regola di Simpson tre.

Formule di Newton-Cotes

Formula aperte e formule chiuse

- Le formule di quadratura appena viste sono esempi di formule dette di **Newton-Cotes** e sono dette **formule chiuse** perchè gli estremi dell'intervallo sono inclusi nei nodi. Esistono anche **formule aperte** (estremi non inclusi), che per ora lasciamo stare.
- Esempi numerici:
[Mathematica file Integrazione1.nb](#)

Formule di Newton-Cotes composte

Quando l'intervallo d'integrazione $[a, b]$ è troppo grande o la funzione varia molto all'interno dell'intervallo, le formule viste in precedenza, applicate al singolo intervallo, non danno più una buona approssimazione all'integrale. Si ricorre allora alla metodologia seguente: si suddivide l'intervallo $[a, b]$ in tanti piccoli intervallini ed a ciascuno di essi vengono applicate le formule di Newton-Cotes (chiuse). Illustriamo questa tecnica, che è quella più usata nell'integrazione numerica, prima nel caso della regola dei trapezi e poi a quella di Simpson.

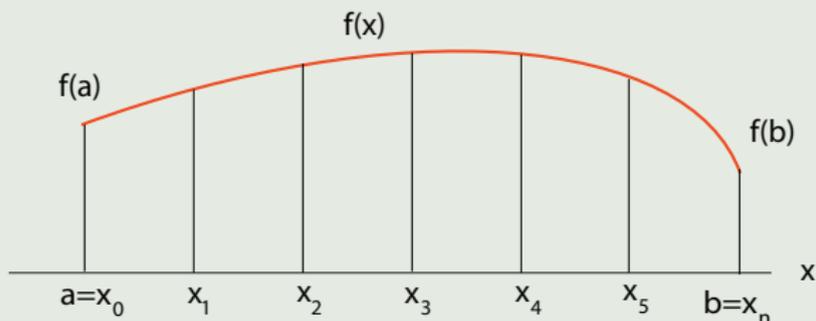
Formule di Newton-Cotes composte

Regola dei trapezi

Sia

$$\int_a^b f(x) dx$$

l'integrale da calcolare. Introduciamo una decomposizione dell'intervallo $[a, b]$ costituita da $n + 1$ nodi $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ che supponiamo equispaziati, con passo di discretizzazione $h = (b - a)/n$, cioè $x_{j+1} = x_j + h$.



Formule di Newton-Cotes composte

Regola dei trapezi

Abbiamo ovviamente:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx.\end{aligned}$$

A ciascun intervallino applichiamo ora la regola dei trapezi, completa dell'errore. Otteniamo:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \sum_{j=1}^n [f(x_{j-1}) + f(x_j)] - \frac{h^3}{12} \sum_{j=1}^n f''(\xi_j)$$

con ξ_j un punto opportuno nell'intervallo $[x_{j-1}, x_j]$.

Formule di Newton-Cotes composte

Regola dei trapezi

- Esplicitiamo la prima sommatoria:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n [f(x_{j-1}) + f(x_j)] &= [f(x_0) + f(x_1)] + [f(x_1) + f(x_2)] + \\ &[f(x_2) + f(x_3)] + \dots + [f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})] + [f(x_{n-1}) + f(x_n)] \\ &= f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n)\end{aligned}$$

- Il primo termine complessivamente quindi è

$$\frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b) \right]$$

Formule di Newton-Cotes composte

Regola dei trapezi

- Per ottenere una stima dell'errore, supponiamo che f sia di classe C^2 in $[a, b]$. Indicando con m ed M rispettivamente il minimo ed il massimo di f'' in $[a, b]$, si ha:

$$\sum_{j=1}^n m \leq \sum_{j=1}^n f''(\xi_j) \leq \sum_{j=1}^n M$$

$$n m \leq \sum_{j=1}^n f''(\xi_j) \leq n M$$

$$m \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f''(\xi_j) \leq M$$

Formule di Newton-Cotes composte

Regola dei trapezi

- Per il teorema dei valori intermedi, esiste pertanto $\xi \in [a, b]$ tale che

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f''(\xi_j) = f''(\xi)$$

- e quindi

$$\frac{h^3}{12} \sum_{j=1}^n f''(\xi_j) = \frac{h^2}{12} \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f''(\xi_j) = \frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$$

Formule di Newton-Cotes composte

Regola dei trapezi

La regola dei trapezi porta dunque alla formula composta

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b) \right] - \frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi).$$

Vediamo che l'errore è quadratico nel passo di discretizzazione h .

Formule di Newton-Cotes composte

Regola di Simpson

- Introduciamo anche in questo caso una decomposizione dell'intervallo $[a, b]$ costituita da $n + 1$ nodi $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ equispaziati, con passo di discretizzazione $h = (b - a)/n$, cioè $x_{j+1} = x_j + h$, solo che questa volta n **deve essere pari**.
- Questa volta scriviamo:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x) dx \\ &= \sum_{j=1}^{n/2} \int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} f(x) dx.\end{aligned}$$

cioè accoppiamo gli intervallini a due a due. A ciascun doppio intervallino applichiamo ora la regola di Simpson, completa dell'errore.

Formule di Newton-Cotes composte

Regola di Simpson

- Otteniamo:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \sum_{j=1}^{n/2} [f(x_{2j-2}) + 4f(x_{2j-1}) + f(x_{2j})] - \frac{h^5}{90} \sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_j)$$

con ξ_j un punto opportuno nell'intervallo $[x_{2j-2}, x_{2j}]$.

Formule di Newton-Cotes composte

Regola di Simpson

- Esplicitiamo la prima sommatoria:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n/2} [f(x_{2j-2}) + 4f(x_{2j-1}) + f(x_{2j})] \\ &= [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] \\ & \dots + [f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \end{aligned}$$

- Il primo termine complessivamente quindi è

$$\begin{aligned} & \frac{h}{3} [f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots \\ & \quad + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(b)] \end{aligned}$$

Formule di Newton-Cotes composte

Regola di Simpson

Per ottenere una stima dell'errore, supponiamo che f sia di classe C^4 in $[a, b]$ e procediamo come per la regola dei trapezi. Otteniamo infine:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(b)] - \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$$

per un opportuno $\xi \in [a, b]$. Vediamo che l'errore è del quart'ordine nel passo di discretizzazione h .

Formule di Newton-Cotes composte

Formule di quadratura

- Le formule composte basate sulla regola dei trapezi e sulla regola di Simpson si possono scrivere nella forma di una somma pesata sui valori della funzione ai nodi:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{j=0}^n w_j f(x_j)$$

dove i coefficienti w_j sono detti **pesi** della formula di quadratura.

- Nel caso della regola dei trapezi abbiamo $w_0 = w_n = h/2$, $w_j = h$, per $j \neq 0, n$;
- per la regola di Simpson abbiamo invece $w_0 = w_n = h/3$, $w_j = 4h/3$ per $j \neq 0, n$ e j pari, $w_j = 2h/3$ per $j \neq 0, n$ e j dispari (ricordiamo che per questa regola di quadratura n deve essere pari).

Formule di Newton-Cotes composte

Formule di quadratura

- Menzioniamo infine (senza ricavarla) la formula $3/8$ di Simpson, per la quale n deve essere un multiplo di 3 : $w_0 = w_n = 3h/8$, $w_1 = w_2 = 9h/8$, $w_4 = 3h/4$, $w_5 = w_6 = 9h/8$, $w_7 = 3h/4$, ..., $w_{n-3} = 2$, $w_{n-2} = w_{n-1} = 9h/8$. Anche in questo caso l'errore è del quart'ordine nel passo h .

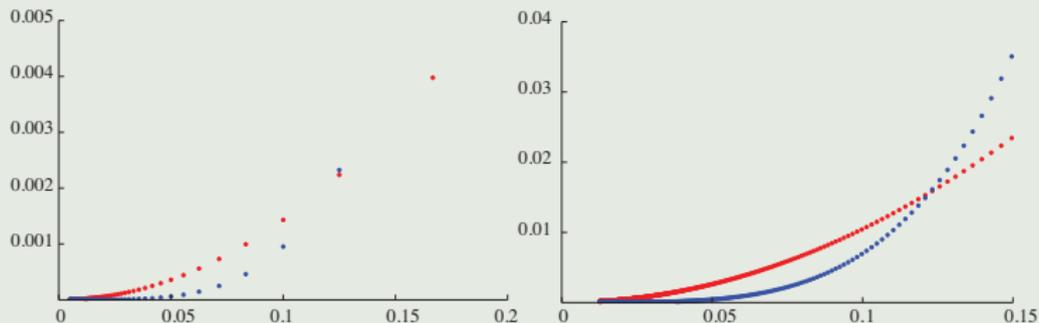
Formule di Newton-Cotes composte

Confronto fra le quadrature dei trapezi e di Simpson

- Da calcolare

$$\int_0^1 e^x dx \quad \int_0^{2\pi} x \sin x dx$$

- errore (in funzione di h) per i trapezi (rosso), e per Simpson (blu *1000):



Metodo di Romberg

Idea di base

Il metodo di Romberg è una tecnica per accelerare la convergenza delle formule di quadratura. Si basa sull'applicazione dell'estrapolazione di Richardson al metodo dei trapezi; il passo di discretizzazione del metodo dei trapezi viene dimezzato ad ogni iterazione.

Idea di base

Sia, come al solito,

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

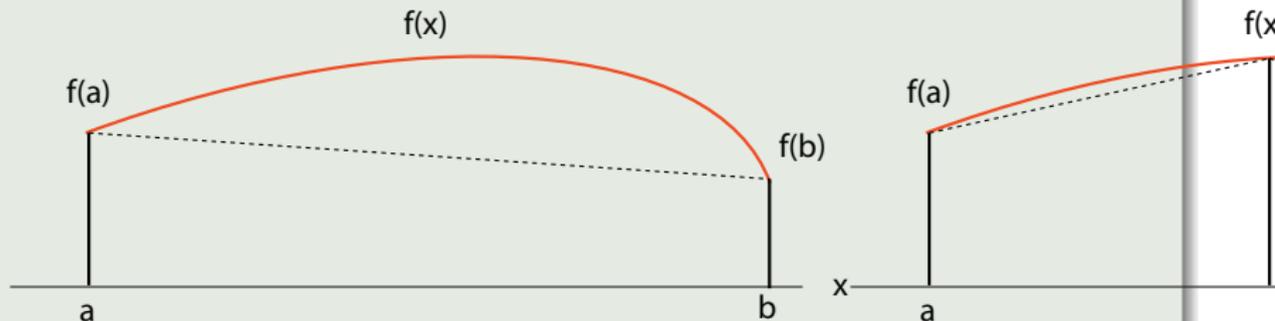
l'integrale da calcolare. Supponiamo, almeno per ora, $f \in C^\infty[a, b]$ e consideriamo la regola dei trapezi (non composta, per ora) sull'intervallo $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(a) + f(b)]$$

Metodo di Romberg

Iterazioni successive dei trapezi

Consideriamo ora applicazioni successive della regola dei trapezi, con il passo dimezzato ad ogni iterazione:



- Il passo ad ogni iterazione risulta allora $h_k = (b - a)/2^{k-1}$, con $k = 1$ che corrisponde alla regola dei trapezi applicata su tutto l'intervallo e $h_{k+1} = h_k/2$;
- ad ogni iterazione si aggiungono nuovi punti alla decomposizione dell'intervallo

Metodo di Romberg

Iterazioni successive dei trapezi

- Usando la formula composta alla k -esima iterazione abbiamo dunque, con $m = 2^{k-1}$,

$$I = \frac{h_k}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_j) + f(b) \right] - \frac{b-a}{12} h_k^2 f''(\xi).$$

- Non è difficile dimostrare che l'errore che compare sopra può essere scritto nella forma di una serie di potenze del tipo $K_1 h_k^2 + K_2 h_k^4 + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} K_j h^{2j}$.
- Introducendo

$$R_{k1} = \frac{h_k}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_j) + f(b) \right]$$

Metodo di Romberg

Iterazioni successive dei trapezi

- ... possiamo allora scrivere

$$I = R_{k1} + K_1 h_k^2 + K_2 h_k^4 + \dots$$

- Il calcolo di R_{k1} non richiede il calcolo della funzione su tutti i nodi che compaiono nella sommatoria, ma soltanto sui nodi che non erano presenti nell'iterazione precedente.
- In particolare:

$$R_{k1} = \frac{h_k}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{j \in \mathcal{N}_1} f(x_j) + f(b) \right. \\ \left. + 2 \sum_{j \in \mathcal{N}_2} f(x_j) \right] = \dots$$

Metodo di Romberg

Iterazioni successive dei trapezi



$$\begin{aligned} \dots &= \frac{1}{2} \frac{h_{k-1}}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{j \in \mathcal{N}_1} f(x_j) + f(b) \right] \\ &+ h_k \sum_{j \in \mathcal{N}_2} f(x_j) = \frac{1}{2} R_{k-1,1} + h_k \sum_{j \in \mathcal{N}_2} f(x_j) \end{aligned}$$

dove \mathcal{N}_1 ed \mathcal{N}_2 sono gli insiemi di indici corrispondenti rispettivamente ai vecchi nodi ed ai nuovi nodi.

- La relazione appena trovata fornisce una relazione di ricorrenza per le R_{k1} . Dalle prime due iterazioni, ...

Metodo di Romberg

Iterazioni successive dei trapezi

$$\begin{aligned}R_{11} &= \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] \\R_{21} &= \frac{b-a}{4} \left[f(a) + f(b) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \\&= \frac{1}{2} R_{11} + \frac{b-a}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned}$$

ricostruiamo le iterazioni successive.

Metodo di Romberg

Estrapolazione di Richardson

- Riprendiamo l'espressione scritta in precedenza

$$I = R_{k1} + K_1 h_k^2 + K_2 h_k^4 + \dots$$

- e mettiamola a sistema con la stessa calcolata all'iterazione $k + 1$, ricordando che $h_{k+1} = h_k/2$:

$$I = R_{k1} + K_1 h_k^2 + K_2 h_k^4 + \dots$$

$$I = R_{k+1,1} + K_1 \frac{h_k^2}{4} + K_2 \frac{h_k^4}{16} + \dots$$

- Moltiplicando la seconda per 4 e sottraendo si elimina il termine quadratico in h_k (come già visto in precedenza a proposito dell'estrapolazione di Richardson).

Metodo di Romberg

Estrapolazione di Richardson

- Ricavando I :

$$I = \frac{4R_{k+1,1} - R_{k1}}{3} - \frac{1}{4}h_k^4 + \dots$$

- Definendo

$$R_{k2} = \frac{4R_{k1} - R_{k-1,1}}{3} = R_{k1} + \frac{R_{k1} - R_{k-1,1}}{3}$$

abbiamo

$$I = R_{k2} - \frac{1}{4}h_k^4 + \dots$$

per $k = 1, 2, \dots, 2^{k-1}$, ottenendo così un'approssimazione con errore del quart'ordine.

Metodo di Romberg

Conclusioni

- Il criterio di arresto può essere stabilito sulla base di un numero massimo di iterazioni o di una tolleranza;
- il test sulla tolleranza viene di solito eseguito (per sicurezza) sugli ultimi tre elementi diagonali.
- Esempi numerici: [Mathematica file: Integrazione3.nb](#).