

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica  
Corso di Analisi Numerica  
3 - PROBLEMI DI INTERPOLAZIONE

Lucio Demeio  
Dipartimento di Scienze Matematiche

- 1 Interpolazione: Polinomio di Lagrange
- 2 Differenze divise
- 3 Splines

# Introduzione

## Problemi di interpolazione

- Supponiamo di avere un insieme di dati che rappresentano misurazioni della temperatura in una certa località durante il mese di luglio con cadenza bisettimanale.
- Rappresentiamo tali dati nella seguente tabella:

Giorno	Temperatura
1	27.1
8	27.2
15	23.5
22	28.0
29	29.1

- Supponiamo di voler conoscere la temperatura in un giorno del mese diverso da quelli tabulato, o di dover utilizzare la temperatura in un modello che la richiede continua, o di voler predire la temperatura più avanti nel tempo.
- Dobbiamo costruire una funzione continua che passi per i punti della tabella: **interpolazione!**

# Interpolazione polinomiale

## Problemi di interpolazione

- Una classe di funzioni continue molto usate nei problemi di interpolazione sono i polinomi.
- Sappiamo che per  $n + 1$  punti assegnati,  $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$  passa uno ed un solo polinomio  $P_n(x)$  di grado  $n$ .

## Approssimazione polinomiale delle funzioni

Una proprietà importante dei polinomi è che possono approssimare bene quanto si vuole una qualunque funzione continua su un intervallo chiuso. In particolare vale il seguente teorema:

## Theorem (Teorema di Weierstrass)

*Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e sia  $\varepsilon > 0$  arbitrario. Allora esiste un polinomio  $P(x)$  tale che, per ogni  $x \in [a, b]$ , si ha  $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ .*

# Interpolazione di Lagrange

## Polinomio interpolatore di Lagrange

- Supporremo nel seguito che le  $y_i$  siano i valori di una funzione nei punti  $x_i$ , chiamati **nodi**:  $y_i = f(x_i)$
- Siano  $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$   $n + 1$  punti del piano cartesiano. Chi è il polinomio di grado  $n$  che passa per essi?
- Cominciamo dalle cose semplici,  $n = 1$ :  $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1)\}$ . Allora

$$P_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Si vede facilmente che  $P_1(x_0) = y_0$  e  $P_1(x_1) = y_1$ .

- $n = 2$ :  $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$ . Allora

$$P_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

# Interpolazione di Lagrange

## Polinomio interpolatore di Lagrange

In generale, per  $n + 1$  punti:

$$\begin{aligned}
 P_n(x) = & y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\dots(x_0 - x_n)} + \\
 & + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\dots(x_1 - x_n)} + \dots \\
 & + y_k \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n)} + \dots \\
 & + y_n \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})}
 \end{aligned}$$

# Interpolazione di Lagrange

## Notazione

I coefficienti delle  $y_k$  si indicano solitamente con  $L_{n,k}(x)$  e sono polinomi di grado  $n$ :

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

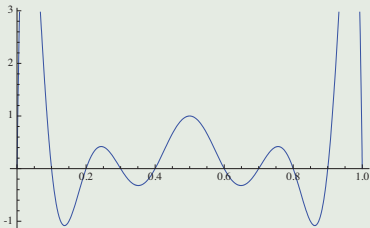
così che il polinomio interpolatore di Lagrange si può scrivere come

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_{n,k}(x)$$

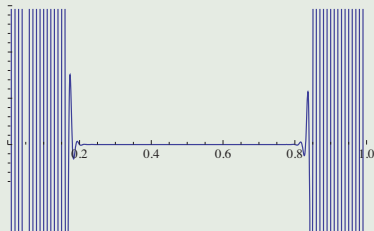
Come son fatti gli  $L_{n,k}$ ?

# Interpolazione di Lagrange

Esempi degli  $L_{n,k}$  su  $[0, 1]$



●  $n = 10, k = 5$



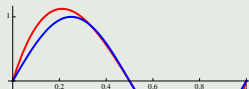
●  $n = 100, k = 5$



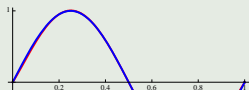
# Interpolazione di Lagrange

## Esempio

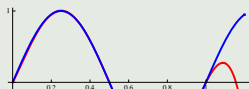
- $f(x) = \sin 2\pi x$  nell'intervallo  $[0, 1]$ , nodi equispaziati;



- $n = 3$



- $n = 5$



- $n = 7$

Mathematica file Interpol1.nb

# Interpolazione di Lagrange

## Theorem (Errore)

Sia  $f \in C^{n+1}[a, b]$  e siano  $x_0, x_1, \dots, x_n$  i nodi dell'interpolazione in  $[a, b]$ , distinti ma altrimenti arbitrari. Allora,  $\forall x \in [a, b]$  esiste un numero  $\xi(x) \in [a, b]$  tale che

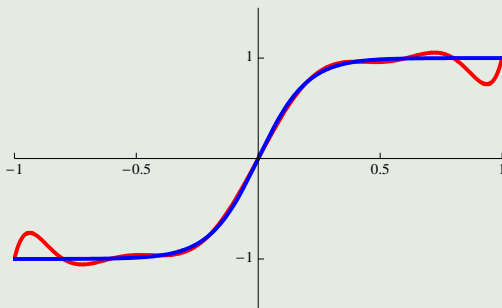
$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{n+1}(\xi(x))}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

Vediamo che  $f(x_k) = P_n(x_k)$  (ovvio!!) e che l'errore è proporzionale alla derivata di ordine  $n+1$  ed inversamente proporzionale ad  $(n+1)!$ . Se la derivata  $(n+1)$ -esima è limitata, allora l'errore va a zero molto rapidamente all'aumentare di  $n$ .

# Interpolazione di Lagrange

## Altro esempio

- $f(x) = \tanh x$  nell'intervallo  $[-1, 1]$ , nodi equispaziati;



- $n = 10$
- [Mathematica file Interpol1.nb](#)

# Differenze divise

## Differenze divise

Un metodo molto usato per la generazione del polinomio interpolatore è quello delle differenze divise.

- Siano  $x_k \in [a, b]$ ,  $k = 0, n$  i nodi e siano  $f(x)$  una funzione continua definita anch'essa in  $[a, b]$ . Sia inoltre  $P_n(x)$  il polinomio interpolatore di Lagrange di grado  $n$ .
- Il polinomio si può scrivere nella forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

dove gli  $a_k$  sono dei coefficienti da determinare.

- Si vede subito che

$$a_0 = P_n(x_0) = f(x_0) \\ a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

# Differenze divise

## Differenze divise

- Continuando

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{f(x_2) - f(x_0) - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\
 &= \frac{f(x_2) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_0) - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\
 &= \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_2 - x_1} \left( \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} - 1 \right)}{x_2 - x_0} \\
 &= \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}
 \end{aligned}$$

# Differenze divise

## Differenze divise

Queste espressioni si possono scrivere più sinteticamente introducendo le **differenze divise** per la funzione  $f$ . La definizione delle differenze divise è induttiva:

- Diff. divisa di ord. **ZERO**:  $f[x_i] = f(x_i)$ ;
- Diff. divisa di ord. **UNO**:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

- Diff. divisa di ord. **k**:

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

# Differenze divise

## Differenze divise

Con queste definizioni, possiamo allora scrivere che

$$a_0 = f(x_0) = f[x_0]$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$$

$$a_2 = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = f[x_0, x_1, x_2]$$

...

$$a_k = f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k]$$

Il polinomio interpolatore si può dunque scrivere come

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k] (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})$$

detta **formula di interpolazione di Newton alle differenze divise**

# Differenze divise

**Table 3.7**

$x$	First divided differences	Second divided differences	Third divided differences
$x_0$	$f[x_0]$		
	$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$		
$x_1$	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	
	$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$
$x_2$	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	
	$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1}$
$x_3$	$f[x_3]$	$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2}$	
	$f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3}$		$f[x_2, x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_3, x_4, x_5] - f[x_2, x_3, x_4]}{x_5 - x_2}$
$x_4$	$f[x_4]$	$f[x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_4, x_5] - f[x_3, x_4]}{x_5 - x_3}$	
	$f[x_4, x_5] = \frac{f[x_5] - f[x_4]}{x_5 - x_4}$		
$x_5$	$f[x_5]$		

Mathematica file [DiffDiv1.nb](#)



# Differenze divise

## Differenze divise - Legame con le derivate

Dal Teorema di Lagrange: se  $f(x)$  è derivabile,  $\exists \xi \in [x_0, x_1]$  tale che

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(\xi)$$

## Theorem

Sia  $f \in C^n[a, b]$  e siano  $x_0, x_1, \dots, x_n$  i nodi in  $[a, b]$ , distinti ma altrimenti arbitrari. Allora  $\exists \xi \in (a, b)$  tale che

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

# Differenze divise

Proof.

Sia  $g(x) = f(x) - P_n(x)$ . Evidentemente  $g(x_k) = 0, \forall k$ . Per il Teorema di Rolle generalizzato,  $\exists \xi \in (a, b)$  tale che  $g^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - P_n^{(n)}(\xi) = 0$ . Ma  $P_n^{(n)}(x) = n! f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ , da cui la tesi.  $\square$

# Differenze divise

## Differenze divise - Nodi equispaziati

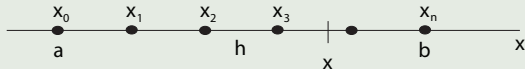
- Siano ora i nodi  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  uniformemente distribuiti in  $[a, b]$ , cioè  $x_{i+1} - x_i = h = \text{cost.}$ , con  $x_0 = a$  e  $x_n = b$ , ed  $h = (b - a)/n$  è detto **passo di discretizzazione**.
- Allora possiamo scrivere che

$$x_i = x_0 + i h \quad x_i - x_j = (i - j) h$$

- Se  $x \in [a, b]$ , possiamo scrivere  $x = x_0 + s h$ , dove  $s$  è un numero reale con  $0 \leq s \leq n$ ;

$$s = 0 \rightarrow x = a, \quad s = i \rightarrow x = x_i, \quad s = n \rightarrow x = b$$

$$i < s < i + 1 \rightarrow x_i < x < x_{i+1}$$



# Differenze divise

## Notazione binomiale

- Avremo dunque

$$x - x_0 = s h, \quad x - x_1 = (s - 1) h$$

$$(x - x_0)(x - x_1) = s(s - 1) h^2$$

$$(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_k) = s(s - 1) \dots (s - k) h^{k+1}$$

- Il polinomio interpolatore di Lagrange diventa allora

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x_0 + sh) = f[x_0] + s h f[x_0, x_1] \\ &\quad + s(s - 1) h^2 f[x_0, x_1, x_2] + \dots \\ &\quad + s(s - 1) \dots (s - n + 1) h^n f[x_0, x_1, \dots, x_n] \\ &= \sum_{k=0}^n s(s - 1) \dots (s - k + 1) h^k f[x_0, x_1, \dots, x_k] \end{aligned}$$

# Differenze divise

## Notazione binomiale - Differenze divise in avanti

- Ricordando la definizione dei coefficienti binomiali

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!};$$

- estendendola anche al campo reale, possiamo scrivere

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n \binom{s}{k} k! h^k f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

- che è detta **formula alle differenze divise in avanti di Newton**

# Differenze divise

## Differenze finite in avanti, formula di Newton

- Le formule per le differenze divise si possono mettere in una forma diversa e più utile per sviluppi futuri. A tal scopo introduciamo la **notazione**  $\Delta$  di Aitken:

$$\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i).$$

- Abbiamo allora che

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1}{h} \Delta f(x_0)$$

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{1}{2h} \frac{\Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)}{h} \\ &= \frac{1}{2h^2} \Delta^2 f(x_0) \end{aligned}$$

# Differenze divise

## Differenze finite in avanti, formula di Newton

- ed in generale

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{1}{k! h^k} \Delta^k f(x_0)$$

- così che il polinomio di Newton può ora essere scritto come

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0)$$

- detta **Formula di Newton per le differenze finite in avanti**.

# Differenze divise

## Differenze finite all'indietro, formula di Newton

- Il polinomio di Newton, invece che

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

può anche essere scritto come

$$P_n(x) = a_n + a_{n-1}(x - x_n) + a_{n-2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \\ + \dots + a_1(x - x_n)(x - x_{n-1})\dots(x - x_2) \\ + a_0(x - x_n)(x - x_{n-1})\dots(x - x_2)(x - x_1)$$

che equivale a riordinare i nodi di interpolazione all'indietro,  
 $(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0)$ .



# Differenze divise

## Differenze finite all'indietro, formula di Newton

- Introducendo il **simbolo**  $\nabla$  tale che  $\nabla f(x_i) = f(x_i) - f(x_{i-1})$  e le differenze divise all'indietro

$$f[x_n, x_{n-1}] = \frac{1}{h} \nabla f(x_n)$$

...

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}] = \frac{1}{k! h^k} \nabla^k f(x_n)$$

- generalizzando i coefficienti binomiali sui reali negativi,

$$\begin{aligned} \binom{-s}{k} &= \frac{-s(-s-1)\dots(-s-k+1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{s(s+1)\dots(s+k-1)}{k!} \end{aligned}$$

# Differenze divise

## Differenze finite all'indietro, formula di Newton

- allora il polinomio di Newton può essere scritto come

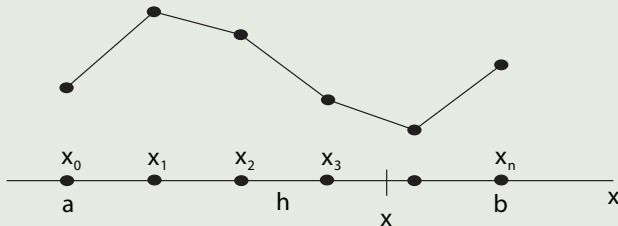
$$P_n(x) = f[x_n] + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(x_n)$$

- detta **Formula di Newton per le differenze finite all'indietro**.
- Le differenze finite all'indietro, qui introdotte nel contesto dell'interpolazione (ma noi non le useremo a tale scopo), torneranno utili più avanti.
- Esistono anche le differenze finite centrate, le vedremo in seguito.

# Splines

## Approssimazione polinomiale a tratti

- Una filosofia diversa per l'approccio al problema dell'interpolazione è quella di costruire una curva polinomiale a tratti, coincidente con i valori della funzione nei nodi, e soddisfacente a condizioni di continuità ai nodi.
- La più semplice è l'interpolazione lineare, che collega i punti di interpolazione con una spezzata.



# Splines

## Approssimazione polinomiale a tratti

- Con la spezzata non si ha regolarità ai nodi.
- Si fa quindi passare per ogni coppia di nodi un polinomio di grado più alto imponendo condizioni di regolarità.
- L'approssimazione polinomiale a tratti più usata e' quella cubica, detta approssimazione con gli **splines**.

# Splines

## Approssimazione polinomiale cubica

- Sia  $f$  definita nell'intervallo  $[a, b]$  e siano  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  i nodi.
- Sia  $S(x)$  un polinomio di terzo grado; indichiamo con  $S_j(x)$  il polinomio di terzo grado definito nell'intervallino  $[x_j, x_{j+1}]$ , con  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ . Ciascun  $S_j$  contiene quattro coefficienti da determinare.
- Le condizioni ai nodi interni sono:

$$S(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n$$

$$S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, n - 2$$

$$S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, n - 2$$

$$S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, n - 2$$

• ...

# Splines

## Condizioni agli estremi

... mentre ai nodi estremi si impongono alternativamente una delle due condizioni:

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0 \quad \text{detta spline naturale}$$

$$S'(x_0) = f'(x_0) \quad S'(x_n) = f'(x_n) \quad \text{spline completa}$$

# Splines

## Approssimazione polinomiale cubica

- Scriviamo il polinomio  $j$ -esimo e le sue derivate come

$$S_j(x) = a_j + b_j (x - x_j) + c_j (x - x_j)^2 + d_j (x - x_j)^3$$

$$S'_j(x) = b_j + 2 c_j (x - x_j) + 3 d_j (x - x_j)^2$$

$$S''_j(x) = 2 c_j + 6 d_j (x - x_j)$$

e notiamo che  $S_j(x_j) = a_j$ ,  $S'_j(x_j) = b_j$  e  $S''_j(x_j) = 2 c_j$  per ogni  $j = 0, 1, \dots, n - 1$  (\*).

- per convenienza, introduciamo  $h_j = x_{j+1} - x_j$ ;
- la condizione  $S_j(x_j) = f(x_j)$  dà immediatamente  $a_j = f(x_j)$ , per  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ ; siano inoltre  $a_n = f(x_n)$ ,  $b_n = S'(x_n)$  e  $c_n = S''(x_n)/2$ ;
- la condizione  $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$  dà allora  $a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3$  per  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ .
- ...

# Splines

- ... la condizione  $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$  dà  
 $b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2$  per  $j = 0, 1, \dots, n-1$ .
- ... la condizione  $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$  dà  $c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j$  per  
 $j = 0, 1, \dots, n-1$ .

Alla fine otteniamo il sistema

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3$$

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2$$

$$c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j$$

per  $j = 0, 1, \dots, n-1$ . Assieme alle condizioni (\*) viste prima, queste danno un sistema algebrico lineare nei coefficienti  $c_j$ .



# Splines

- Ricaviamo  $d_j$  dalla terza equazione e sostituiamo nelle altre due:

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3} (2c_j + c_{j+1})$$

$$b_{j+1} = b_j + h_j (c_j + c_{j+1}) \quad (*)$$

- Dalla prima di queste ricaviamo  $b_j$ :

$$b_j = \frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - h_j \frac{2c_j + c_{j+1}}{3} \quad \text{da cui}$$

$$b_{j-1} = \frac{a_j - a_{j-1}}{h_{j-1}} - h_{j-1} \frac{2c_{j-1} + c_j}{3}$$

- Sostituendo nella (\*) con  $j \rightarrow j - 1$  otteniamo il sistema

# Splines

$$h_{j-1} c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j) c_j + h_j c_{j+1} = 3 \frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - 3 \frac{a_j - a_{j-1}}{h_{j-1}}$$

per  $j = 1, 2, \dots, n - 1$ .

- I membri di destra sono noti, in quanto  $a_j = f(x_j)$  e  $h_j = x_{j+1} - x_j$ .
- Si tratta di un sistema del tipo  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ , con  $c_0$  e  $c_n$  assegnati dalle condizioni agli estremi:  $c_0 = c_n = 0$  per la spline naturale, mentre per la spline completa vengono assegnati  $b_0 = f'(a)$  e  $b_n = f'(b)$ .
- La matrice  $\mathbf{A}$  è tridiagonale e soddisfa le proprietà richieste per l'esistenza e l'unicità della soluzione del sistema; quindi la soluzione è unica sia per la spline naturale che per la spline completa.

# Splines

## Spline naturale

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \frac{a_2 - a_1}{h_1} - 3 \frac{a_1 - a_0}{h_0} \\ \dots \\ 3 \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} - 3 \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{h_{n-2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

# Splines

## Spline completa

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \frac{a_1 - a_0}{h_0} - 3 f'(a) \\ 3 \frac{a_2 - a_1}{h_1} - 3 \frac{a_1 - a_0}{h_0} \\ \dots \\ 3 \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} - 3 \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{h_{n-2}} \\ 3 f'(b) - 3 \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{pmatrix}$$

# Splines

## Theorem (Stima dell'errore)

Sia  $f \in C^4[a, b]$  e sia

$$M = \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Allora, se  $S(x)$  è la spline completa (unica) per la funzione  $f$  sui nodi  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  allora

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - S(x)| \leq \frac{5M}{384} \max_{0 \leq j \leq n-1} (x_{j+1} - x_j)^4$$

## Applicazioni

La costruzione degli algoritmi di interpolazione tramite splines implica la risoluzione di un sistema lineare, che vedremo in futuro. Per ora accontentiamoci di qualche esempio elementare.