Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Corso di Analisi Numerica

2 - EQUAZIONI NON LINEARI

Lucio Demeio
Dipartimento di Scienze Matematiche

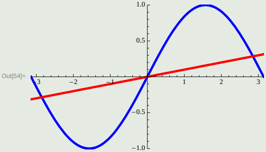
Introduzione

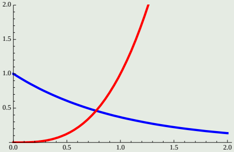
Problema: trovare le soluzioni di un'equazione del tipo

$$f(x) = 0$$

Esempio

- $$\sin x - a\,x = 0$$
  $$e^{-x} = x^3$$



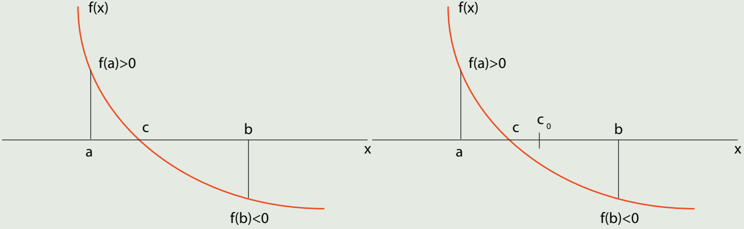


-
- Mathematica file EqNonLin1.nb

Metodo di bisezione

Bisezione

- Dal teorema degli zeri, data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, se $f(a)\,f(b) < 0$ allora $\exists\ c$ tale che $f(c) = 0$.



- Costruiamo tre successioni, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$: siano

$$a_0 = a \qquad b_0 = b \qquad c_0 = \frac{a+b}{2}$$

Metodo di bisezione

Bisezione

- Nel nostro esempio, $f(a_0)\,f(c_0) < 0$, quindi il teorema degli zeri si applica nuovamente all'intervallo $[a_0, c_0]$. Siano allora

$$a_1 = a_0 \qquad b_1 = c_0 \qquad c_1 = (a_1 + b_1)/2$$

- ... e così via:
se $f(a_n)\,f(c_n) < 0$ allora $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = c_n$;
se $f(a_n)\,f(c_n) > 0$ allora $a_{n+1} = c_n$ e $b_{n+1} = b_n$
e $c_{n+1} = (a_{n+1} + b_{n+1})/2$.
- La successione $\{c_n\}$ converge a c (lo sappiamo dal teorema degli zeri), quindi **l'algoritmo basato sul metodo di bisezione fornisce una successione che converge alla soluzione**.
- In pratica, l'algoritmo viene fermato dopo N passi (o iterazioni) ed otteniamo un'approssimazione per lo zero della funzione: $c \approx c_N$. Come scegliere N (criterio di arresto)?

Metodo di bisezione

Criterio di arresto

Varie possibilità:

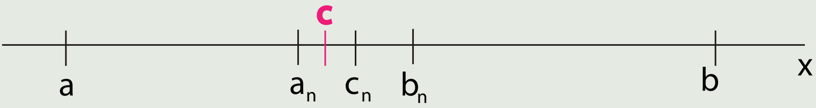
- Fissare un massimo numero di iterazioni, $N \leq N_{max}$ (è di solito considerato un fallimento - legato a ragioni di costo computazionale);
- Fissare una tolleranza $\eta << 1$ su c: $|c_N - c| \leq \eta$ (ovviamente c non lo conosciamo ... vedi più avanti) - è il caso più frequente nella prassi - la chiameremo **tolleranza assoluta**
- Fissare una **tolleranza relativa** $\eta << 1$ su c: $|(c_N - c)/c| \leq \eta$ (anche qui c non lo conosciamo ...);
- Fissare una tolleranza $\eta << 1$ su $f(c)$: $|f(c_N)| \leq \eta$

Quale errore commettiamo nei vari casi?

Metodo di bisezione

Analisi dell'errore nel caso $|c_N - c| \leq \eta$

- Ricordiamo che $c_n \in [a_n, b_n]$ e $c \in [a_n, b_n]$;
- $c_n = (a_n + b_n)/2$ e $|b_n - a_n| = (b - a)/2^n$;
- quindi $|c_n - c| \leq (b - a)/2^n$;
- ci fermiamo quando $(b - a)/2^N \leq \eta$.
- dunque $N \approx \log_2(b - a)/\eta$.



Nel caso $|(c_N - c)/c| \leq \eta$ ci fermiamo quando $(b - a)/(|c_N| 2^N) \leq \eta$

Metodo di bisezione

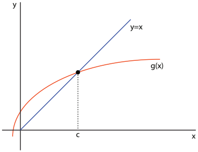
Ordine di convergenza

- Nel caso $|c_n - c| \leq (b-a)/2^n$ abbiamo che $\alpha_n = c_n$ e $\beta_n = 1/2^n$, con $K = b - a$.
- Quindi c_n converge a c con tasso di convergenza $O(1/2^n)$, ovvero

$$c_n = c + O\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

Metodo del punto fisso

Un punto $x = c$ si dice **punto fisso** per una funzione $g(x)$ se $g(c) = c$, cioè una soluzione dell'equazione $g(x) = x$.



Punto fisso

- Un problema del tipo $f(x) = 0$ si può sempre trasformare in un equivalente problema di punto fisso; esiste cioè sempre una funzione $g(x)$ per cui l'equazione $f(x) = 0$ è equivalente all'equazione $g(x) = x$.
- Ci sono diversi modi per definire una funzione $g(x)$ a tale scopo: ad esempio $g(x) = x - f(x)$ (quello più semplice) ma anche $g(x) = x + a\, f(x)$ e molti altri.

Metodo del punto fisso

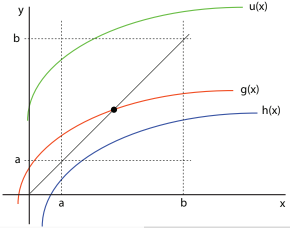
Data una funzione $g(x)$, definita su un intervallo $[a, b]$, quando ha un punto fisso e quando questo è unico? E come si costruisce?

Theorem

Se g è una funzione continua su $[a, b]$ e $g(x) \in [a, b]\ \forall x \in [a, b]$, allora g ha un punto fisso in $[a, b]$; inoltre, se esiste k con $0 < k < 1$ tale che $|g'(x)| < k\ \forall x \in [a, b]$, il punto fisso è unico.

Proof.

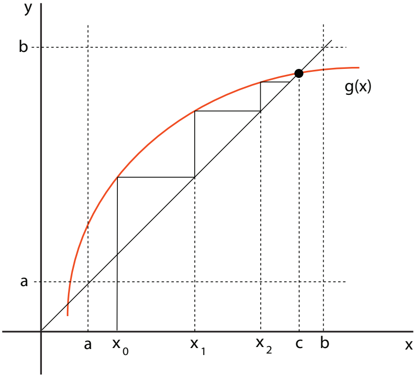
... $\square$



Metodo del punto fisso

Theorem (Teorema del punto fisso)

Sia $g(x)$ una funzione che soddisfa le condizioni del teorema precedente. Allora, $\forall x_0 \in [a, b]$ la successione definita da $x_{n+1} = g(x_n)$ converge al punto fisso $x = c$ (unico !!) della funzione g.



Metodo del punto fisso

Proof.

Per le condizioni del teorema precedente, $x_n \in [a,b]\ \forall n$. Inoltre, per il teorema di Lagrange,
$|x_n - c| = |g(x_{n-1}) - g(c)| = |g'(\xi_n)||x_{n-1} - c| \leq k|x_{n-1} - c|$,
con $\xi_n \in [a,b]$. Per induzione, allora abbiamo che
$|x_n - c| \leq k^n\,|x_0 - c|$. Siccome $k < 1$, si ha che $\lim_{n\to\infty} k^n = 0$ e quindi $\lim_{n\to\infty} |x_n - c| \leq \lim_{n\to\infty} k^n\,|x_0 - c| = 0$. Quindi $\{x_n\}$ converge a c. $\square$

Metodo del punto fisso

Theorem

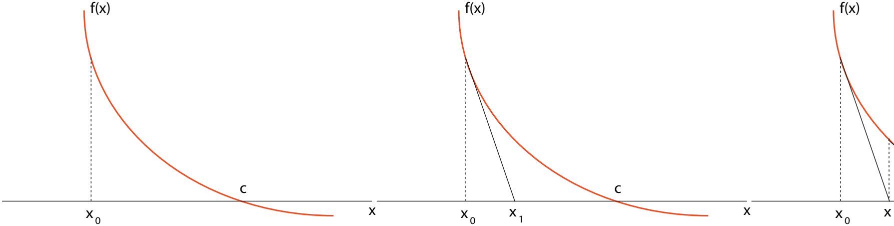
Se g soddisfa le ipotesi del teorema del punto fisso, allora l'errore che si commette approssimando c con x_n soddisfa alle limitazioni

$$|x_n - c| \leq k^n \, max\{x_0 - a, b - x_0\}$$
$$|x_n - c| \leq \frac{k^n}{1-k} \, |x_1 - x_0|$$

Proof.

... □

Metodo di Newton-Raphson



Newton-Raphson

- Tangente ad $f(x)$ per $(x_0, f(x_0))$: $y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$;
- l'intersezione della tangente con l'asse delle x fornisce $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$;
- ... e così via:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

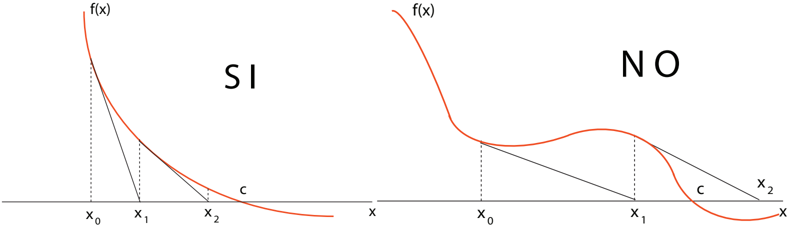
Metodo di Newton-Raphson

Quando converge Newton-Raphson?

Theorem

Sia $f(x)$ *di classe* $C^2([a,b])$. *Se esiste* $c \in [a,b]$ *tale che* $f(c) = 0$ *ed* $f'(c) \neq 0$, *allora esiste un* $\delta > 0$ *tale che il metodo di Newton genera una successione* x_n, *con* $x_0 \in (c-\delta, c+\delta)$, *e con* $x_n \to c$ *per* $n \to \infty$.

Intuitivamente:



Metodo di Newton-Raphson

Proof.

Il metodo di Newton è un problema di punto fisso per la funzione $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ Dobbiamo innanzitutto determinare un intervallo $I(\delta) = [c - \delta, c + \delta]$ che viene mappato in se stesso dalla funzione g e per il quale esiste una costante reale k, con $0 < k < 1$, per cui $|g'(x)| \leq k \; \forall x \in I(\delta)$. Sia $0 < k < 1$ arbitrario. Essendo $f'(c) \neq 0$, esiste un $I(\delta_1) \subset [a, b]$ tale che $\forall x \in I(\delta_1)$ si ha $f'(x) \neq 0$. Quindi, g è definita e continua su $I(\delta_1)$, abbiamo $g'(x) = f(x)f''(x)/[f'(x)]^2$ ed essendo $f \in C^2([a, b])$ è anche $g \in C^1(I(\delta_1))$. Notiamo che $g'(c) = 0$; quindi, per la continuità di g', esiste un $\delta > 0$ tale che, $\forall x \in I(\delta)$ è $|g'(x)| \leq k$. Resta da dimostrare che g mappa $I(\delta)$ in $I(\delta)$. Sia dunque $x \in I(\delta)$; per il teorema di Lagrange, esiste ξ compreso tra x e c tale che $|g(x) - c| = |g(x) - g(c)| = |g'(\xi)| \, |x - c| \leq k|x - c| < |x - c| < \delta$, e quindi $g(x) \in I(\delta)$. Le ipotesi del teorema del punto fisso sono dunque tutte soddisfatte e la successione $x_{n+1} = g(x_n)$ converge al punto fisso $c \; \forall x_0 \in I(\delta)$. □

Metodo di Newton-Raphson

Convergenza

- In metodo di Newton converge rapidamente se la scelta iniziale x_0 e' abbastanza vicina allo zero $x = c$, in particolare se $f(x)$ è monotona tra x_0 e c;
- dopo poche iterazioni già si capisce se il metodo converge o se "va a galline" (cioè non converge);
- uno svantaggio è dato dalla necessità di conoscere la derivata $f'(x)$;
- i criteri di arresto sono essenzialmente gli stessi del metodo di bisezione, solo che non abbiamo a disposizione un intervallo $[a_n, b_n]$ come nell'altro caso; allora, la tolleranza (semplice o relativa) viene testata sulla differenza $|x_{n+1} - x_n|$; vale a dire che $|x_{n+1} - x_n| < \eta$ diventa il criterio di arresto (tolleranza semplice).

Metodo di Newton-Raphson

Theorem (Ordine di convergenza quadratico)

Sia f tale da obbedire alle condizioni del teorema sulla convergenza del metodo di Newton-Raphson. Allora il metodo gode di ordine di convergenza quadratico.

Proof.

Con riferimento a quanto visto in precedenza, siano $\{\alpha_n\}$ e $\{\beta_n\}$ le successioni date da $\alpha_n = x_{n+1} - c$ e $\beta_n = x_n - c$. Allora abbiamo $|\alpha_n| \leq |\beta_n|^2$. Infatti, con uno sviluppo di Taylor possiamo scrivere:
$0 = f(c) = f(x_n) + (c - x_n)\, f'(x_n) + (c - x_n)^2\, f''(\xi)/2$ da cui (dividendo per $f'(x_n)$)
$f(x_n)/f'(x_n) + (c - x_n) = -(c - x_n)^2\, f''(\xi)/(2\, f'(x_n))$ e, ricordando che $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$,
$c - x_{n+1} = (c - x_n)^2\, f''(\xi)/(2\, f'(x_n))$ e quindi $|\alpha_n| \leq K\, |\beta_n|^2$. □