Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Corso di Analisi Numerica

1 - INTRODUZIONE

Lucio Demeio
Dipartimento di Scienze Matematiche

1. Introduzione

2. Analisi degli errori

Informazioni generali

- Libro di testo: **J. D. Faires, R. Burden,** ***Numerical Analysis*****, Brooks/Cole, 9th Ed. 2009** (ma anche ...); A.M. Perdon, *Analisi Numerica*, Pitagora Editrice 2005.
- Pagina web:

  `www.dipmat.univpm.it/~demeio`

  poi seguire il link Didattica ed in nome del corso.
- Orario di ricevimento: martedì 9.00-11.00 (indicativo) e per appuntamento. Telefono **071-2204627**; e-mail **demeio@dipmat.univpm.it**; da **NON** usare **per l'iscrizione agli esami**.
- Esami: Prova scritta + prova pratica.
- Iscrizione agli esami OBBLIGATORIA presso lo sportello del Dipartimento di Scienze Matematiche, anche telefonicamente all'interno 4868 di mattina.

Introduzione

Obiettivi

- Che cosè l'analisi numerica?
- Molti problemi fisici, ingegneristici ed economici vengono descritti da modelli matematici di vario tipo: equazioni algebriche, equazioni differenziali, autovalori ed autovettori, etc.
- Il più delle volte non possediamo una soluzione analitica del problema e bisogna trovarne un'approssimazione.
- Due strade: approssimazioni analitiche (serie di Taylor, metodi perturbativi) o metodi numerici
- I metodi numerici consistono (in generale) di algoritmi per costruire successioni (numeriche o di funzioni) che convergono al risultato desiderato

Contenuti del corso

- **Preliminari matematici.** Richiamo ad alcuni concetti di Analisi (successioni, limiti, continuità, teoremi fondamentali).
- **Analisi degli errori.** Errori di troncamento ed errori di arrotondamento.
- **Algoritmi, stabilità e convergenza.**
- **Soluzioni di equazioni in una variabile.** Per esempio:

$$\sin x - \frac{x}{10} = 0$$
$$e^{-x} = x^3.$$

- **Interpolazione ed approssimazione polinomiale.** Talvolta si conosce una funzione solo su un insieme di punti, e la si vuol estendere ad un intervallo continuo. Oppure l'espressione di una funzione è troppo complicata e si vuole utilizzare un'approssimazione più semplice.

Contenuti del corso

- **Differenziazione numerica**
- **Integrazione numerica** Per esempio:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

  dove $f(x)$ è tale per cui non si sa calcolare una primitiva.
- **Metodi diretti per i sistemi lineari** Per esempio:

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

  dove A è una matrice $n \times n$ non troppo grande.
- **Metodi iterativi nell'algebra** Quando A è una matrice $n \times n$ di grandi dimensioni.
- **Problemi agli autovalori**
- **Sistemi non lineari**
- **Equazioni differenziali ordinarie**

Analisi degli errori

Rappresentazione dei numeri

- In un computer i numeri vengono rappresentati con un numero finito di cifre decimali. Ad esempio $\pi = 3.14159265...$ oppure $\sqrt{3} = 1.73205080...$ (normalmente 16 o 32 cifre).
- Rappresentazione in virgola mobile: se $y = \pm 0.d_1 d_2 ... d_k \times 10^n$, con $1 \leq d_1 \leq 9$ (cioè $d_1 \neq 0$) $0 \leq d_i \leq 9$, $i = 2, 3, .., k$ diremo che y e' rappresentato in virgola mobile a k **cifre decimali**.
- Per esempio, $p = 0.314159265 \times 10^1$ è la rappresentazione di π a 9 cifre decimali e ...
- ... $y = 0.71283 \times 10^3$ è la rappresentazione di 712.83 a 5 cifre decimali.
- Siano y e z due numeri decimali molto vicini tra loro, p. es. $y = 0.d_1 ... d_r\, \alpha_{r+1} ... \alpha_k \times 10^n$ e $z = 0.d_1 ... d_r\, \beta_{r+1} ... \beta_k \times 10^n$ in rappr. a k cifre decimali. Allora $y - z = 0.\gamma_1 ... \gamma_{k-r} \times 10^{n-r}$. Cioè $y - z$ ha una rappresentazione a $k - r$ cifre significative.

Analisi degli errori

Esempio

- Conseguenza: $(\sqrt{3})^2 \neq 3$!!
- Sia, per esempio, $\sqrt{3} = 1.73$ la rappr. con 3 cifre decimali. Allora $(\sqrt{3})^2 = 2.9929 \to 2.99$
- **Errore di arrotondamento:** errore commesso usando la rappr. in virgola mobile al posto del valore esatto;
- Errore assoluto $|2.99 - 3| = 0.01$
  Errore relativo $|(2.99 - 3)/3| = 0.00333$
- In generale, se p e' il valore vero e p^* quello in rappr. decimale,

$$\varepsilon = |p - p^*| \qquad \text{errore assoluto}$$

$$\varepsilon_r = \frac{|p - p^*|}{|p|}, p \neq 0 \qquad \text{errore relativo}$$

- Mathematica file Intro1.nb

Analisi degli errori

Esempio

Proviamo a risolvere $a\,x^2 + b\,x + c = 0$
Sappiamo che

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\,a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\,a}$$

Siano $a = 1$, $b = 74.23$ e $c = 1$ e lavoriamo con 4 cifre decimali.

Mathematica file Intro2.nb

Algoritmi

Definizione

Un metodo numerico e' costituito da un insieme di algoritmi. Un algoritmo costruisce un'approssimazione numerica alla soluzione di un problema (equazione algebrica o differenziale, integrazione numerica, etc.) mediante una successione di n passi.

Stabilità

Un algoritmo si dice **stabile** se piccoli cambiamenti nelle condizioni iniziali provocano piccole variazioni nel risultato finale.

Crescita dell'errore

- Primo passo: E_0;
- **Crescita lineare**: se esiste C t. c. $E_n \approx C\, n\, E_0$;
- **Crescita esponenziale**: se esiste $C > 1$ t. c. $E_n \approx C^n\, E_0$;

Algoritmi

Esercizio

La crescita lineare porta in generale ad algoritmi stabili ed è sia inevitabile che accettabile
La crescita esponenziale va evitata e porta ad algoritmi instabili.
Provare a risolvere l'equazione ricorsiva

$$p_n = \frac{10}{3} p_{n-1} - p_{n-2}$$

con $p_0 = 1$ e $p_1 = 1/3$. Cosa si osserva?

Algoritmi

Tasso di convergenza

Sia $\{\beta_n\}$ una successione infinitesima, cioè $\beta_n \to 0$ e sia $\{\alpha_n\}$ una successione convergente, con $\alpha_n \to \alpha$.

Se $\exists$ una costante reale $K > 0$ t.c. risulta definitivamente $|\alpha_n - \alpha| \leq K\,|\beta_n|$ diremo che $\{\alpha_n\}$ converge ad α con **tasso di convergenza** (o ordine di convergenza) $O(\beta_n)$. Scriveremo allora che $\alpha_n = \alpha + O(\beta_n)$.

In generale, si sceglie

$$\beta_n = \frac{1}{n^p} \qquad *$$

per qualche $p > 0$. La successione $\{\beta_n\}$ indica la "velocità" con cui $\{\alpha_n\}$ converge al suo limite. Con la scelta $*$, tanto più grande è p tanto più rapidamente $\{\alpha_n\}$ converge ad α.

Algoritmi

Esercizio

Determinare il tasso di convergenza delle successioni

$$\alpha_n^{(1)} = \frac{n^2+2}{n^3+3} \qquad \alpha_n^{(2)} = \frac{n^2+2}{n^4+3}.$$

Quale delle due converge più rapidamente?

Tasso di convergenza per funzioni

La definizione di tasso di convergenza si generalizza facilmente al caso di funzioni reali di variabile reale.

Sia $G(h)$ una funzione infinitesima e sia $F(h) \to L$ per $h \to 0$. Se $\exists$ una costante reale $K > 0$ t.c. risulta definitivamente $|F(h) - L| \leq K\,|G(h)|$ per $h \to 0$, diremo che $F(h)$ converge ad L con **tasso (ordine) di convergenza** $O(G(h))$.
Scriveremo allora che $F(h) = L + O(G(h))$, $h \to 0$.

Algoritmi

Esercizio

Determinare l'ordine di convergenza delle funzioni

$$f(h) = \frac{\sin h}{h} \qquad g(h) = \cos h + \frac{1}{2}\, h^2.$$

Quale delle due converge più rapidamente?