Risultati di esistenza di soluzioni in problemi prossimi alla risonanza

GEDO 2018 Ancona

Andrea Sfecci
Dipartimento di Ingegneria Industriale e Scienze Matematiche
Università Politecnica delle Marche

Introduzione

Un po' di storia

C'era una volta...

...e c'è ancora...

Un’equazione... classica

... l’oscillatore armonico

$$x'' + \lambda x = 0\,, \qquad \lambda > 0$$

Soluzione: $x(t) = C\phi_\lambda(t - t_0)$, $C \in \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$.

$$\phi_\lambda(t) = \sin\left(\sqrt{\lambda}\, t\right)\,.$$

- problema di Dirichlet $x(0) = 0 = x(T)$;
- problema di Neumann $x'(0) = 0 = x'(T)$;
- problema misto $x'(0) = 0 = x(T)$;
- problema periodico $x(0) = x(T)$, $x'(0) = x'(T)$.

Un'equazione... un po' meno classica

$$x'' + \mu x^+ - \nu x^- = 0$$

$x^+ = \frac{|x|+x}{2}$, $x^- = \frac{|x|-x}{2}$, $\mu, \nu > 0$
Soluzione: $x(t) = C\phi_{\mu,\nu}(t - t_0)$, $C \in \mathbb{R}^+$, $t_0 \in \mathbb{R}$.

$$\phi_{\mu,\nu}(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\mu}} \sin\left(\sqrt{\mu} t\right) & t \in \left[0, \dfrac{\pi}{\sqrt{\mu}}\right], \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{\nu}} \sin\left(\sqrt{\nu}\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{\mu}} - t\right)\right) & t \in \left[\dfrac{\pi}{\sqrt{\mu}}, \dfrac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \dfrac{\pi}{\sqrt{\nu}}\right]. \end{cases}$$

Prima parte:

Soluzioni periodiche

Lo spettro

Il problema periodico

$$\begin{cases} x'' + \lambda x = 0\,, & \qquad\qquad \lambda > 0 \\ x(0) = x(T)\,, \quad x'(0) = x'(T). \end{cases}$$

ha soluzioni se $\lambda \in \Sigma = \left\{ \left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2 \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

e se perturbo?

$$\begin{cases} x'' + \lambda x = r(t,x)\,, \\ x(0) = x(T)\,, \quad x'(0) = x'(T). \end{cases}$$

con r limitata ammette soluzioni *facilmente se* $\lambda \notin \Sigma$.

$$\begin{cases} x'' + \lambda_N x = r(t,x)\,, \\ x(0) = x(T)\,, \quad x'(0) = x'(T). \end{cases}$$

con r limitata *non* ammette *necessariamente* soluzioni se $\lambda_N \in \Sigma$.

Oscillatore armonico risonante perturbato

$$\begin{cases} x'' + \lambda_N x = r(t,x)\,, & \lambda_N \in \Sigma \\ x(0) = x(T)\,, \quad x'(0) = x'(T). \end{cases}$$

Possibilità: assumo

$$\int_{\{v>0\}} \Big(\liminf_{x\to+\infty} r(t,x)\Big) v(t)\,dt + \int_{\{v<0\}} \Big(\limsup_{x\to-\infty} r(t,x)\Big) v(t)\,dt > 0$$

oppure

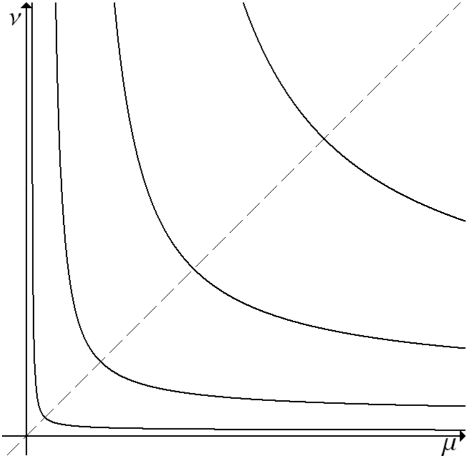
$$\int_{\{v>0\}} \Big(\limsup_{x\to+\infty} r(t,x)\Big) v(t)\,dt + \int_{\{v<0\}} \Big(\liminf_{x\to-\infty} r(t,x)\Big) v(t)\,dt < 0$$

per ogni soluzione periodica non nulla v di $v'' + \lambda_N v = 0$.
(condizione di Landesman-Lazer - 1970)

Lo spettro di Dancer-Fučík

$$\begin{cases} x'' + \mu x^+ - \nu x^- = 0\,, \\ x(0) = x(T)\,, \quad x'(0) = x'(T). \end{cases}$$

ha soluzioni se $(\mu, \nu) \in \Sigma_{DF}$.



e se perturbo?

$$\begin{cases} x'' + \mu x^+ - \nu x^- = r(t,x)\,, \\ x(0) = x(T)\,, \quad x'(0) = x'(T). \end{cases}$$

con r limitata ammette soluzioni *facilmente se* $(\mu,\nu) \notin \Sigma_{DF}$.

$$\begin{cases} x'' + \mu x^+ - \nu x^- = r(t,x)\,, \\ x(0) = x(T)\,, \quad x'(0) = x'(T). \end{cases}$$

con r limitata *non* ammette *necessariamente* soluzioni se $(\mu,\nu) \in \Sigma_{DF}$.

Oscillatore asimmetrico risonante perturbato

$$\begin{cases} x'' + \mu x^+ - \nu x^- = r(t,x) & (\mu,\nu) \in \Sigma_{DF} \\ x(0) = x(T)\,, \quad x'(0) = x'(T). \end{cases}$$

Possibilità: assumo

$$\int_{\{v>0\}} \left(\liminf_{x\to+\infty} r(t,x) \right) v(t)\, dt + \int_{\{v<0\}} \left(\limsup_{x\to-\infty} r(t,x) \right) v(t)\, dt > 0$$

oppure

$$\int_{\{v>0\}} \left(\limsup_{x\to+\infty} r(t,x) \right) v(t)\, dt + \int_{\{v<0\}} \left(\liminf_{x\to-\infty} r(t,x) \right) v(t)\, dt < 0$$

per ogni soluzione periodica non nulla v di $v'' + \mu v^+ - \nu v^- = 0$.
(condizione di Landesman-Lazer)

e se perturbo ancora di più?

$$\begin{cases} x'' + f(t,x) = 0\,, \\ x(0) = x(T)\,, \quad x'(0) = x'(T). \end{cases}$$

con f tale che

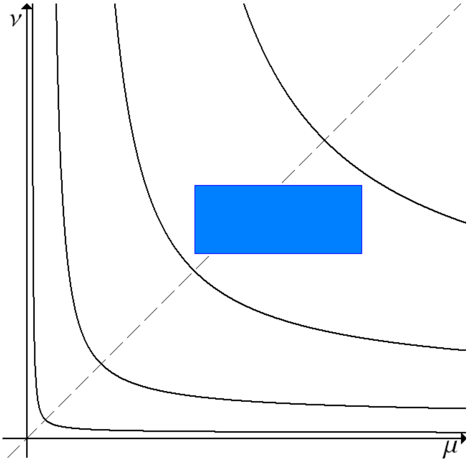
$$\mu_1 \le \liminf_{x\to+\infty} \frac{f(t,x)}{x} \le \limsup_{x\to+\infty} \frac{f(t,x)}{x} \le \mu_2$$

$$\nu_1 \le \liminf_{x\to-\infty} \frac{f(t,x)}{x} \le \limsup_{x\to-\infty} \frac{f(t,x)}{x} \le \nu_2$$

$\mathcal{R} = (\mu_1,\mu_2) \times (\nu_1,\nu_2)\,, \ldots$

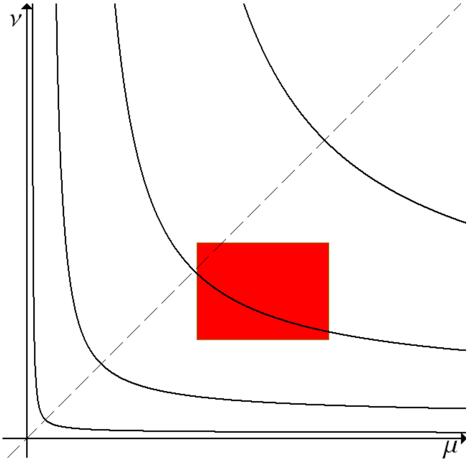
Possibili situazioni: Drábek-Invernizzi 1986

$$\mathcal{R} = (\mu_1, \mu_2) \times (\nu_1, \nu_2)\,, \quad \mathcal{R} \cap \Sigma_{DF} = ?$$



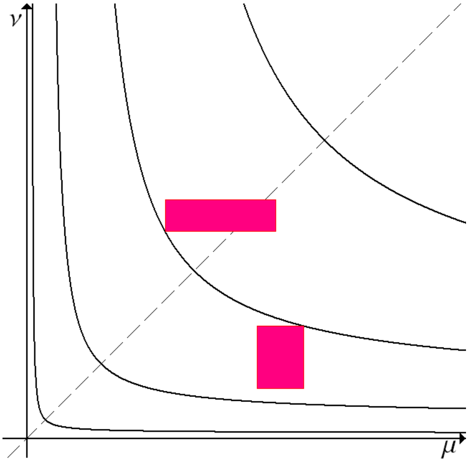
Possibili situazioni

$$\mathcal{R} = (\mu_1, \mu_2) \times (\nu_1, \nu_2), \quad \mathcal{R} \cap \Sigma_{DF} = ?$$



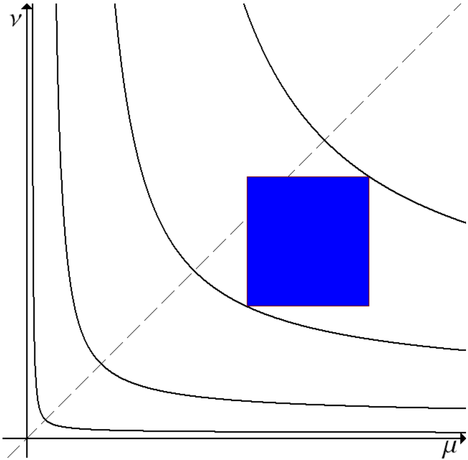
Possibili situazioni: risonanza semplice

$$\mathcal{R} = (\mu_1, \mu_2) \times (\nu_1, \nu_2), \quad \mathcal{R} \cap \Sigma_{DF} = ?$$



Possibili situazioni: risonanza doppia (Fabry 1995)

$$\mathcal{R} = (\mu_1, \mu_2) \times (\nu_1, \nu_2), \quad \mathcal{R} \cap \Sigma_{DF} = ?$$



Oscillatore asimmetrico doppiamente risonante

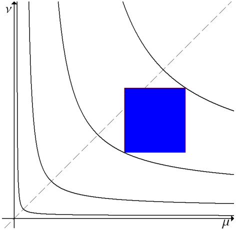
Cerco soluzioni per

$$\begin{cases} x'' + f(t,x) = 0\,, \\ x(0) = x(T)\,, \quad x'(0) = x'(T). \end{cases}$$

con f tale che

$$\mu_1 \le \liminf_{x\to+\infty} \frac{f(t,x)}{x} \le \limsup_{x\to+\infty} \frac{f(t,x)}{x} \le \mu_2$$

$$\nu_1 \le \liminf_{x\to-\infty} \frac{f(t,x)}{x} \le \limsup_{x\to-\infty} \frac{f(t,x)}{x} \le \nu_2$$



Oscillatore asimmetrico doppiamente risonante

Inoltre deve valere la condizione di Landesman-Lazer (Fabry 1995):

- Per ogni soluzione periodica v non nulla di $v'' + \mu_1 v^+ - \nu_1 v^- = 0$

$$\int_{\{v>0\}} \left(\liminf_{x\to+\infty} f(t,x) - \mu_1 x \right) v(t)\, dt + \int_{\{v<0\}} \left(\limsup_{x\to-\infty} f(t,x) - \nu_1 x \right) v(t)\, dt > 0$$

Oscillatore asimmetrico doppiamente risonante

Inoltre deve valere la condizione di Landesman-Lazer (Fabry 1995):

- Per ogni soluzione periodica v non nulla di $v'' + \mu_1 v^+ - \nu_1 v^- = 0$

$$\int_{\{v>0\}} \left(\liminf_{x\to+\infty} f(t,x) - \mu_1 x \right) v(t)\, dt + \int_{\{v<0\}} \left(\limsup_{x\to-\infty} f(t,x) - \nu_1 x \right) v(t)\, dt > 0$$

- Per ogni soluzione periodica v non nulla di $v'' + \mu_2 v^+ - \nu_2 v^- = 0$

$$\int_{\{v>0\}} \left(\limsup_{x\to+\infty} f(t,x) - \mu_2 x \right) v(t)\, dt + \int_{\{v<0\}} \left(\liminf_{x\to-\infty} f(t,x) - \nu_2 x \right) v(t)\, dt < 0$$

Idea della dimostrazione

- Problema periodico: uso l'invarianza per omotopia del grado topologico (Altri BVP: uso metodi di tipo shooting.).
  Ho bisogno di stime a priori per le soluzioni del problema.

Idea della dimostrazione

- Problema periodico: uso l'invarianza per omotopia del grado topologico (Altri BVP: uso metodi di tipo shooting.).
  Ho bisogno di stime a priori per le soluzioni del problema.
- Per assurdo ipotizzo l'esistenza di una successione di soluzioni di ampiezza arbitrariamente grande.

Idea della dimostrazione

- Problema periodico: uso l'invarianza per omotopia del grado topologico (Altri BVP: uso metodi di tipo shooting.).
  Ho bisogno di stime a priori per le soluzioni del problema.
- Per assurdo ipotizzo l'esistenza di una successione di soluzioni di ampiezza arbitrariamente grande.
- La normalizzo. La successione normalizzata converge debolmente a una certa funzione limite a meno di sottosuccessioni.

Idea della dimostrazione

- Problema periodico: uso l'invarianza per omotopia del grado topologico (Altri BVP: uso metodi di tipo shooting.).
  Ho bisogno di stime a priori per le soluzioni del problema.
- Per assurdo ipotizzo l'esistenza di una successione di soluzioni di ampiezza arbitrariamente grande.
- La normalizzo. La successione normalizzata converge debolmente a una certa funzione limite a meno di sottosuccessioni.
- **(!)** Mostro che il limite è una soluzione di uno dei due problemi *omogenei "estremali"*.

Idea della dimostrazione

- Problema periodico: uso l'invarianza per omotopia del grado topologico (Altri BVP: uso metodi di tipo shooting.).
  Ho bisogno di stime a priori per le soluzioni del problema.
- Per assurdo ipotizzo l'esistenza di una successione di soluzioni di ampiezza arbitrariamente grande.
- La normalizzo. La successione normalizzata converge debolmente a una certa funzione limite a meno di sottosuccessioni.
- **(!)** Mostro che il limite è una soluzione di uno dei due problemi *omogenei "estremali"*.
- Parametrizzo la successione usando le coordinate indotte dalla funzione limite e...

Idea della dimostrazione

- Problema periodico: uso l'invarianza per omotopia del grado topologico (Altri BVP: uso metodi di tipo shooting.).
  Ho bisogno di stime a priori per le soluzioni del problema.
- Per assurdo ipotizzo l'esistenza di una successione di soluzioni di ampiezza arbitrariamente grande.
- La normalizzo. La successione normalizzata converge debolmente a una certa funzione limite a meno di sottosuccessioni.
- **(!)** Mostro che il limite è una soluzione di uno dei due problemi *omogenei "estremali"*.
- Parametrizzo la successione usando le coordinate indotte dalla funzione limite e...
- **(!)** trovo una contraddizione con le condizioni di Landesman-Lazer.

Passiamo ora a risultati più recenti

L'oscillatore con impatto: $\nu \to +\infty$

$$x'' + f(t,x) = 0\,, \qquad x > 0$$

+ condizioni di rimbalzo.

$$\mu_N \le \liminf_{x\to+\infty} \frac{f(t,x)}{x} \le \limsup_{x\to+\infty} \frac{f(t,x)}{x} \le \mu_{N+1}$$

$\mu_k = \left(\frac{k\pi}{T}\right)^2$
(sono tra due asintoti successivi)

Inoltre deve valere la condizione di Landesman-Lazer (AS 2017):

- Per ogni $t_0 \in [0, T]$, definita $\psi_N(t) = \left|\sin\left(\sqrt{\mu_N}\, t\right)\right|$,

$$\int_0^T \left(\liminf_{x\to+\infty} f(t,x) - \mu_N x\right) \psi_N(t+t_0)\, dt > 0$$

- Per ogni $t_0 \in [0, T]$, definita $\psi_{N+1}(t) = \left|\sin\left(\sqrt{\mu_{N+1}}\, t\right)\right|$,

$$\int_0^T \left(\limsup_{x\to+\infty} f(t,x) - \mu_{N+1} x\right) \psi_{N+1}(t+t_0)\, dt < 0$$

Possibili applicazioni per sistemi con impatto su sfere e cilindri
⇒ [AS 2017, Adv. Nonlinear Stud.]

Superlinearità da un lato: $\nu \to +\infty$

$$x'' + f(t,x) = 0\,,$$

$$\liminf_{x\to-\infty} \frac{f(t,x)}{x} = +\infty;$$

$$\mu_N \le \liminf_{x\to+\infty} \frac{f(t,x)}{x} \le \limsup_{x\to+\infty} \frac{f(t,x)}{x} \le \mu_{N+1}$$

$$\mu_k = \left(\frac{k\pi}{T}\right)^2$$

(sono tra due asintoti successivi)

Inoltre deve valere la condizione di Landesman-Lazer:

- Per ogni $t_0 \in [0, T]$, definita $\psi_N(t) = ???$,

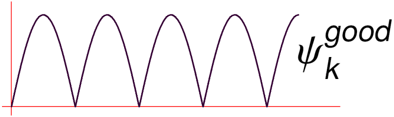
$$\int_0^T \left(\liminf_{x \to +\infty} f(t, x) - \mu_N x \right) \psi_N(t + t_0)\, dt > 0$$

- Per ogni $t_0 \in [0, T]$, definita $\psi_{N+1}(t) = ???$,

$$\int_0^T \left(\limsup_{x \to +\infty} f(t, x) - \mu_{N+1} x \right) \psi_{N+1}(t + t_0)\, dt < 0$$

Quale funzione?

$$\psi_k^{good}(t) = \left|\sin\left(\sqrt{\mu_k}\, t\right)\right| ,$$

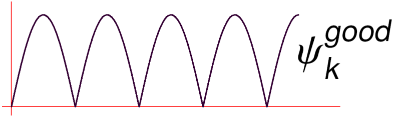


$$\psi_k^{bad}(t) = \begin{cases} \sin\left(\sqrt{\mu_k}\, t\right) & t \in [0, T/k] \\ 0 & t \in [T/k, T] \end{cases} \qquad \text{(estesa } T\text{-per.)}$$

Quale funzione?

$$\psi_k^{good}(t) = \left|\sin\left(\sqrt{\mu_k}\, t\right)\right| ,$$

Esempi: $(1+\sin^2(t))x^5 + x^3$, $x^3 + \sin^2(t)x^2$



$$\psi_k^{bad}(t) = \begin{cases} \sin\left(\sqrt{\mu_k}\, t\right) & t \in [0, T/k] \\ 0 & t \in [T/k, T] \end{cases} \qquad \text{(estesa } T\text{-per.)}$$

Esempio: $\sin^2(t)x^5 + x^3$ $\Rightarrow$ [AS 2016, Ann. Mat. Pura Appl.]

Singolarità forte: $\nu \to +\infty$

Un risultato simile si ha per

$$x'' + f(t,x) = 0\,, \quad x > 0$$

$$f(t,x) < h(x)\,,$$

$$\liminf_{x\to 0^+} h(x) = -\infty,$$

$$\int_0^\delta h(x)\,dx = -\infty$$

$$\mu_N \le \liminf_{x\to+\infty} \frac{f(t,x)}{x} \le \limsup_{x\to+\infty} \frac{f(t,x)}{x} \le \mu_{N+1}$$

$\Rightarrow$ [AS 2016, AMPA]

Bibliografia

- A. Fonda, M. Garrione, 2011, J. Diff. Eq.
- A. Fonda, M. Garrione, 2012, Proc. R. Soc. Edindurgh
- AS, 2016, Ann. Mat. Pura Appl.
- AS, 2017, Adv. Nonlinear Stud.

- A. Fonda, M. Garrione, 2013, Topol. Methods Nonlinear Anal.
- A. Boscaggin, M. Garrione, 2016, Z. Anal. Anwend.
- AS, *in arrivo*

Seconda parte:

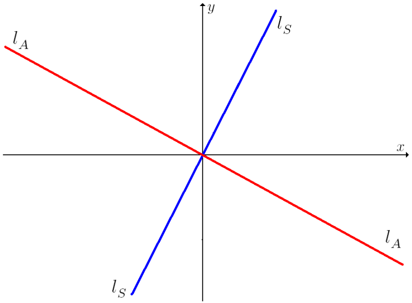
Altri problemi

Altri BVP

$$\begin{cases} x'' + f(t,x) = 0 \\ \qquad\qquad x(0) = 0 = x(T) \\ \text{oppure} \quad x'(0) = 0 = x'(T) \\ \text{oppure} \quad x'(0) = 0 = x(T) \end{cases}$$

Altri BVP

$$\begin{cases} Jz' = f(t,z) \\ \qquad\qquad z(0) \in \ell_S \\ \qquad \text{e} \quad z(T) \in \ell_A \end{cases}$$



Altri BVP

$$\begin{cases} Jz' = g(t,z) + r(t,z) \\ z(0) \in \ell_S\,, \quad z(T) \in \ell_A\,. \end{cases}$$

r limitata e

$$g(t,z) = \gamma(t,z)\nabla V_1(z) + (1 - \gamma(t,z))\nabla V_2(z)$$

V_i sono funzioni positivamente omogenee di grado 2:

$$0 < V(\lambda z) = \lambda^2 v(z) \quad \forall \lambda > 0\,, \forall z \neq 0\,.$$

Semplifichiamo...

Oscillatore asimmetrico *molto perturbato* con condizioni di Dirichlet.

$$\begin{cases} x'' + f(t,x) = 0 \\ x(0) = 0 = x(T)\,. \end{cases}$$

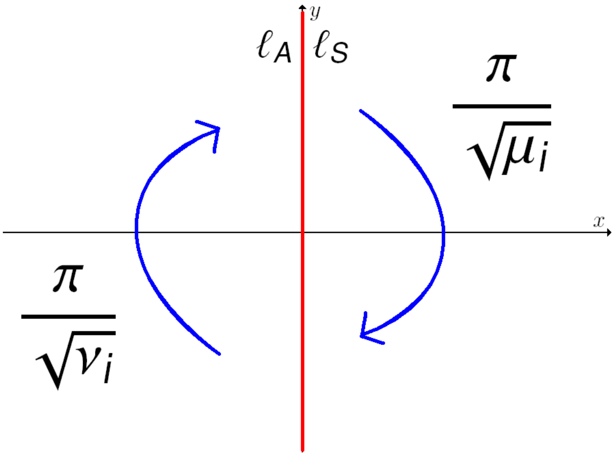
$$\mu_1 \leq \liminf_{x\to+\infty} \frac{f(t,x)}{x} \leq \limsup_{x\to+\infty} \frac{f(t,x)}{x} \leq \mu_2$$

$$\nu_1 \leq \liminf_{x\to-\infty} \frac{f(t,x)}{x} \leq \limsup_{x\to-\infty} \frac{f(t,x)}{x} \leq \nu_2$$

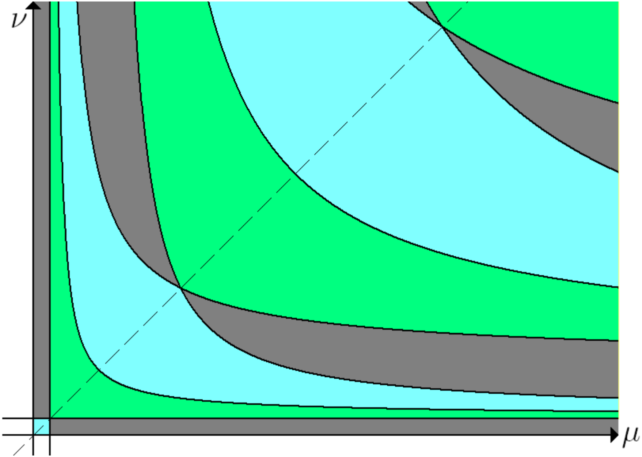
$$\begin{cases} x'' + \mu_1 x^+ - \nu_1 x^- = 0 \\ x(0) = 0 = x(T)\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' + \mu_2 x^+ - \nu_2 x^- = 0 \\ x(0) = 0 = x(T)\,. \end{cases}$$

Oscillatore asimmetrico e problema di Dirichlet

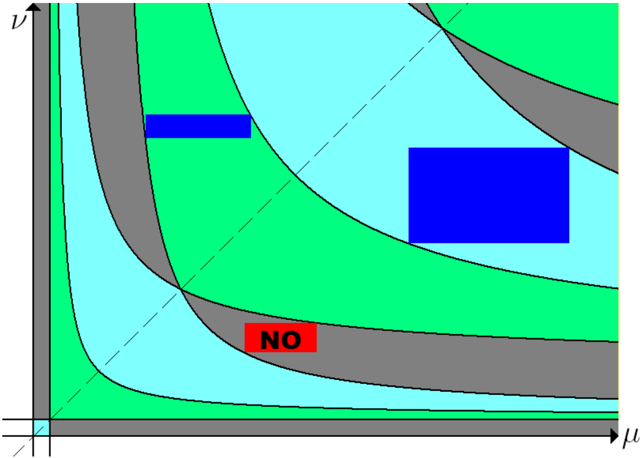
$$V_i(x,y) = \frac{1}{2}\left(y^2 + \mu_i(x^+)^2 + \nu_i(x^-)^2\right)$$



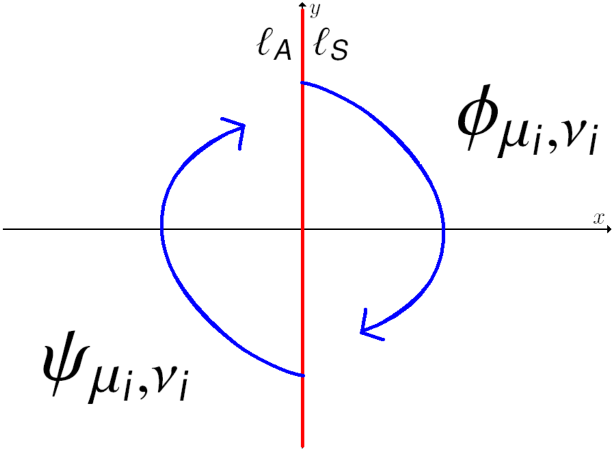
Spettro di Fucik



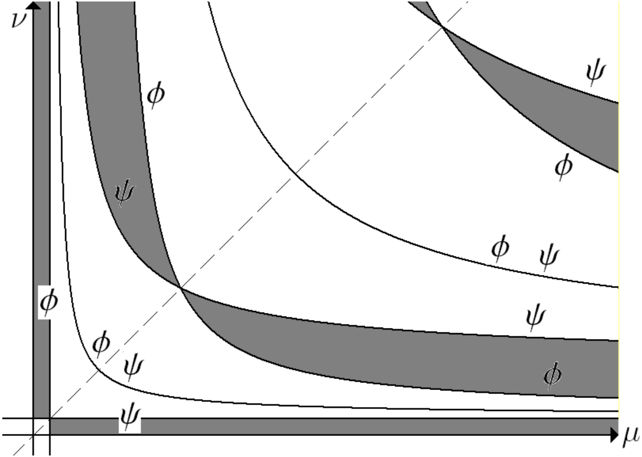
Spettro di Fucik



Difficoltà di lettura



Difficoltà di lettura



La condizione tipo Landesman-Lazer

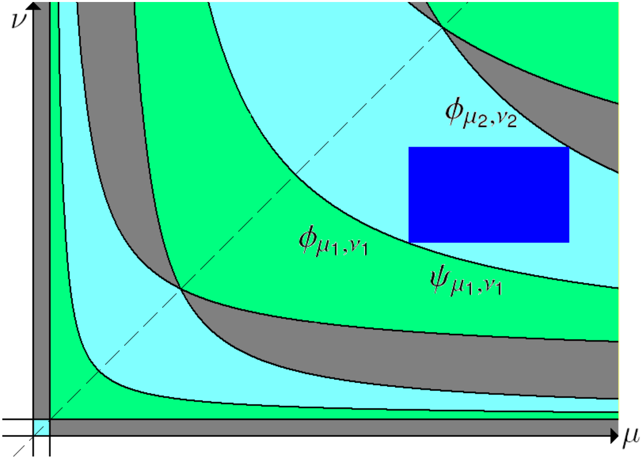
Stessa estetica, ma adesso devo scegliere $v = \phi$ o $v = \psi$ (o entrambe) a seconda di quale curva tocco.

$$\mathcal{A}^-(v) := \int_{\{v>0\}} \Big(\liminf_{x\to+\infty} f(t,x) - \mu_1 x \Big) v(t)\,dt + \int_{\{v<0\}} \Big(\limsup_{x\to-\infty} f(t,x) - \nu_1 x \Big) v(t)\,dt > 0$$

$$\mathcal{A}^+(v) := \int_{\{v>0\}} \Big(\limsup_{x\to+\infty} f(t,x) - \mu_2 x \Big) v(t)\,dt + \int_{\{v<0\}} \Big(\liminf_{x\to-\infty} f(t,x) - \nu_2 x \Big) v(t)\,dt < 0$$

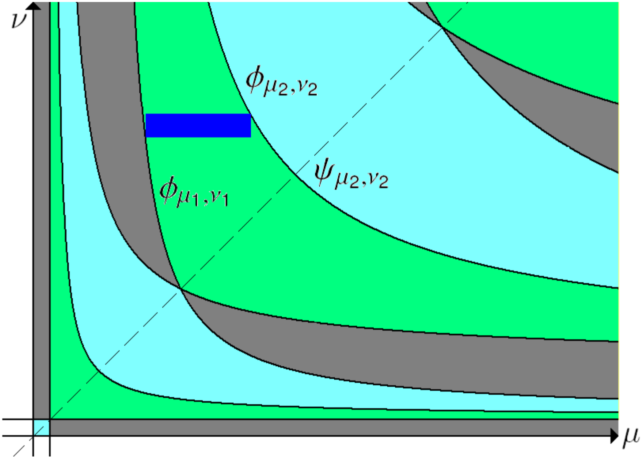
Esempio

$$\mathcal{A}^-(\phi_{\mu_1,\nu_1}) > 0\,, \qquad \mathcal{A}^-(\psi_{\mu_1,\nu_1}) > 0\,, \qquad e \qquad \mathcal{A}^+(\phi_{\mu_2,\nu_2}) < 0$$



Esempio

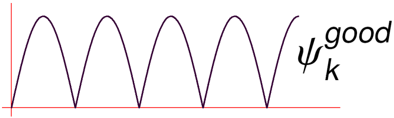
$$\mathcal{A}^{-}(\phi_{\mu_1,\nu_1}) > 0\,, \qquad e \qquad \mathcal{A}^{+}(\phi_{\mu_2,\nu_2}) < 0\,, \qquad \mathcal{A}^{+}(\psi_{\mu_2,\nu_2}) < 0$$



Open problems

Open problem: quale funzione?

1) È possibile ottenere una condizione di Landesman-Lazer che utilizzi sempre $\psi_k^{good} = \left|\sin\left(\sqrt{\mu_k}\, t\right)\right|$?



$$\psi_k^{bad}(t) = \begin{cases} \sin\left(\sqrt{\mu_k}\, t\right) & t \in [0, T/k] \\ 0 & t \in [T/k, T] \end{cases} \qquad \text{(estesa } T\text{-per.)}$$

$\Rightarrow$ [AS 2016, Ann. Mat. Pura Appl.]

Open Problems: altri BVP

$$\begin{cases} Jz' = g(t,z) + r(t,z) \\ z(0) \in \ell_S\,, \quad z(T) \in \ell_A\,. \end{cases}$$

r limitata e $g(t,z) = \gamma(t,z)\nabla V_1(z) + (1 - \gamma(t,z))\nabla V_2(z)$.

2) Rimuovere l'ipotesi:
V_i funzioni positivamente omogenee di grado 2.

Open Problems: altri BVP

$$\begin{cases} Jz' = g(t,z) + r(t,z) \\ z(0) \in \ell_S\,, \quad z(T) \in \ell_A\,. \end{cases}$$

r limitata e $g(t,z) = \gamma(t,z)\nabla V_1(z) + (1 - \gamma(t,z))\nabla V_2(z)$.

2) Rimuovere l'ipotesi:
V_i funzioni positivamente omogenee di grado 2.

$\Rightarrow$ introdurre singolarità o superlinearità nel sistema.


Grazie per l'attenzione.