# Simmetrie e reversibilità (di sistemi differenziali ordinari) che conservano la misura

Marco Sabatini
Dip. di Matematica - Univ. di Trento

GEDO 2018
Ancona

# Involuzioni

Un'involuzione è un omeomorfismo $\sigma : \Omega \to \Omega$ diverso dall'identità che coincide con il suo inverso:

$$\sigma \neq Id, \qquad \sigma = \sigma^{-1},$$

ovvero tale che $\sigma^2 = Id$.

# Involuzioni

Un'involuzione è un omeomorfismo $\sigma : \Omega \to \Omega$ diverso dall'identità che coincide con il suo inverso:

$$\sigma \neq Id, \qquad \sigma = \sigma^{-1},$$

ovvero tale che $\sigma^2 = Id$.

Se $A \subset \Omega$, diciamo che $A$ è $\sigma$-invariante se $\sigma(A) = A$.
Un punto $z \in \Omega$ si dice $\sigma$-fisso se $\sigma(z) = z$.

# Involuzioni

Un'involuzione è un omeomorfismo $\sigma : \Omega \to \Omega$ diverso dall'identità che coincide con il suo inverso:

$$\sigma \neq Id, \qquad \sigma = \sigma^{-1},$$

ovvero tale che $\sigma^2 = Id$.

Se $A \subset \Omega$, diciamo che $A$ è $\sigma$-invariante se $\sigma(A) = A$.
Un punto $z \in \Omega$ si dice $\sigma$-fisso se $\sigma(z) = z$.

Denotando con $\mu$ la misura di Lebesgue $n$-dimensionale, diciamo che $\sigma$ conserva la misura se, per ogni insieme misurabile $A$, si ha:

$$\mu\big(\sigma(A)\big) = \mu(A).$$

# Involuzioni - esempi lineari

Nel piano, le simmetrie speculari, come:

$$\sigma(x, y) = (-x, y),$$

che ha una retta di punti fissi, l'asse di simmetria, e le simmetrie rispetto ad un punto:

$$\sigma(x, y) = (-x, -y),$$

che hanno un unico punto fisso, detto centro di simmetria.

# Involuzioni - esempi lineari

Nel piano, le simmetrie speculari, come:

$$\sigma(x, y) = (-x, y),$$

che ha una retta di punti fissi, l'asse di simmetria, e le simmetrie rispetto ad un punto:

$$\sigma(x, y) = (-x, -y),$$

che hanno un unico punto fisso, detto centro di simmetria.

Più in generale, in $\mathbb{R}^n$:

$$\sigma(x_1, \ldots, x_n) = (\kappa_1 x_1, \ldots, \kappa_1 x_n), \quad \kappa_i = \pm 1, \quad i = 1, \ldots, n,$$

ed i $\kappa_i$ non tutti uguali ad 1. L'insieme dei punti fissi è una varietà lineare di dimensione $d$, con $0 \leq d \leq n - 1$.

# Involuzioni - esempi non lineari

In dimensione 1 ogni involuzione definita in un intervallo (in senso esteso) è strettamente decrescente ed ha al più un punto fisso.

# Involuzioni - esempi non lineari

In dimensione 1 ogni involuzione definita in un intervallo (in senso esteso) è strettamente decrescente ed ha al più un punto fisso.

Esempi:

$$\sigma(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$$

# Involuzioni - esempi non lineari

In dimensione 1 ogni involuzione definita in un intervallo (in senso esteso) è strettamente decrescente ed ha al più un punto fisso.

Esempi:

$$\sigma(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$$

$$\sigma(x) = \log \frac{e^x}{e^x - 1}$$

# Involuzioni - esempi non lineari

In dimensione 1 ogni involuzione definita in un intervallo (in senso esteso) è strettamente decrescente ed ha al più un punto fisso.

Esempi:

$$\sigma(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$$

$$\sigma(x) = \log \frac{e^x}{e^x - 1}$$

Nel piano, per ogni funzione continua $\eta(x)$, la mappa

$$\sigma(x,y) = (x, 2\eta(x) - y)$$

è un'involuzione i cui punti fissi costituiscono il grafico della funzione $y = \eta(x)$, detto curva di simmetria.

# Involuzioni - esempi non lineari

In $\mathbb{R}^{2h}$, ponendo $X = (x_1, \ldots, x_h)$ e $Y = (y_{h+1}, \ldots, y_{2h})$, e indicando con $\eta(X)$ una funzione continua da $\mathbb{R}^h$ in $\mathbb{R}^h$, la mappa

$$\sigma(X, Y) = (X, 2\eta(X) - Y),$$

è un'involuzione con insieme di punti fissi $Y = \eta(X)$, varietà $h$-dimensionale.

# Involuzioni - esempi non lineari

In $\mathbb{R}^{2h}$, ponendo $X = (x_1, \ldots, x_h)$ e $Y = (y_{h+1}, \ldots, y_{2h})$, e indicando con $\eta(X)$ una funzione continua da $\mathbb{R}^h$ in $\mathbb{R}^h$, la mappa

$$\sigma(X, Y) = (X, 2\eta(X) - Y),$$

è un'involuzione con insieme di punti fissi $Y = \eta(X)$, varietà $h$-dimensionale.

Se le $\sigma_i : \mathbb{R}^{h_i} \to \mathbb{R}^{h_i}$ sono involuzioni per $i = 1, \ldots, n$, allora la mappa

$$\sigma(X_1, \ldots, X_n) = (\sigma_1(X_1), \ldots, \sigma_n(X_n))$$

è a sua volta un'involuzione. L'insieme dei punti fissi è il prodotto cartesiano degli insiemi dei punti fissi delle involuzioni componenti.

# Simmetrie e reversibilità

Consideriamo un campo vettoriale $V(z) \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e connesso, ed il sistema

$$\dot{z} = V(z), \qquad z \in \Omega. \tag{1}$$

Denotiamo con $\phi_V(t, z)$ il flusso locale definito da $V$ in $\Omega$.

# Simmetrie e reversibilità

Consideriamo un campo vettoriale $V(z) \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e connesso, ed il sistema

$$\dot{z} = V(z), \qquad z \in \Omega. \tag{1}$$

Denotiamo con $\phi_V(t, z)$ il flusso locale definito da $V$ in $\Omega$.

Un'involuzione $\sigma : \Omega \to \Omega$ è una simmetria del sistema (**??**) se commuta con il flusso locale:

$$\sigma(\phi_V(t, z)) = \phi_V(t, \sigma(z)).$$

# Simmetrie e reversibilità

Consideriamo un campo vettoriale $V(z) \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e connesso, ed il sistema

$$\dot{z} = V(z), \qquad z \in \Omega. \tag{1}$$

Denotiamo con $\phi_V(t, z)$ il flusso locale definito da $V$ in $\Omega$.

Un'involuzione $\sigma : \Omega \to \Omega$ è una simmetria del sistema (**??**) se commuta con il flusso locale:

$$\sigma(\phi_V(t, z)) = \phi_V(t, \sigma(z)).$$

Un'involuzione $\sigma : \Omega \to \Omega$ è una reversibilità del sistema (**??**) se anti-commuta con il flusso locale:

$$\sigma(\phi_V(t, z)) = \phi_V(-t, \sigma(z)).$$

# Simmetrie e reversibilità

Non è necessario conoscere il flusso per sapere se un'involuzione è una simmetria o reversibilità del sistema. Indichiamo con $J_\sigma(z)$ la matrice jacobiana di $\sigma$ in $z$.

# Simmetrie e reversibilità

Non è necessario conoscere il flusso per sapere se un'involuzione è una simmetria o reversibilità del sistema. Indichiamo con $J_\sigma(z)$ la matrice jacobiana di $\sigma$ in $z$.

- Un'involuzione $\sigma$ è una simmetria del sistema (**??**) se e solo se

$$F(\sigma(z)) = J_\sigma(z) \cdot F(z), \tag{2}$$

# Simmetrie e reversibilità

Non è necessario conoscere il flusso per sapere se un'involuzione è una simmetria o reversibilità del sistema. Indichiamo con $J_\sigma(z)$ la matrice jacobiana di $\sigma$ in $z$.

- Un'involuzione $\sigma$ è una simmetria del sistema (**??**) se e solo se

$$F(\sigma(z)) = J_\sigma(z) \cdot F(z), \tag{2}$$

- Un'involuzione $\sigma$ è una reversibilità del sistema (**??**) se e solo se

$$F(\sigma(z)) = -J_\sigma(z) \cdot F(z), \tag{3}$$

# Integrabilità di sistemi reversibili

Un sistema si dice reversibile se ammette una reversibilità rispetto ad un'involuzione.

# Integrabilità di sistemi reversibili

Un sistema si dice reversibile se ammette una reversibilità rispetto ad un'involuzione.

**Teorema**

*(Poincaré): Se un sistema piano ha un punto critico monodromo $O$ ed è specularmente reversibile rispetto ad una retta per $O$, allora $O$ è un centro.*

# Integrabilità di sistemi reversibili

Un sistema si dice reversibile se ammette una reversibilità rispetto ad un'involuzione.

### Teorema

*(Poincaré): Se un sistema piano ha un punto critico monodromo $O$ ed è specularmente reversibile rispetto ad una retta per $O$, allora $O$ è un centro.*

Lo stesso risultato vale per reversibilità non-lineari.

# Integrabilità di sistemi reversibili

Un sistema si dice reversibile se ammette una reversibilità rispetto ad un'involuzione.

Teorema

*(Poincaré): Se un sistema piano ha un punto critico monodromo $O$ ed è specularmente reversibile rispetto ad una retta per $O$, allora $O$ è un centro.*

Lo stesso risultato vale per reversibilità non-lineari.

# Risultati

T. R. Blows, N. G. Lloyd - *The number of limit cycles of certain polynomial differential equations*, (1984)

H. Zoladek - *The classification of reversible cubic systems with center*, (1994) (57 pagine)

C. B. Collins - *Poincaré's reversibility condition*, (2001)

V. Romanovski - *Time-reversibility in 2-dim systems*, (2008)

W. von Wahl - *Remarks on lines of reversibility for Poincaré's centre problem*, (2009)

J. Giné, S. Maza - *Reversibility and the center problem*, (2011)

# Risultati

A. Algaba, I. Checa, C. Garcia, E. Gamero - *On orbital-reversibility for a class of planar dynamical systems*, (2015)

M. S. - *On the fixed points set of differential systems reversibilities*, (2016)

M. S. - *Every period annulus is both reversible and symmetric*, (2017)

M. S. - *Measure-preserving symmetries and reversibilities of ordinary differential systems*, (2018)

# Derivate di ordine superiore lungo le soluzioni

Chiamiamo $D(z) \equiv \operatorname{div} F(z)$ la divergenza di $F$ in $z$, e per ogni $j \in \mathbb{N}$ indichiamo con

$$D^{(j)}(z) = \left. \frac{d^j D(\phi_V(t,z))}{dt^j} \right|_{t=0}$$

la derivata $j$-esima della divergenza lungo il flusso locale.

# Conservazione delle derivate di ordine superiore

Teorema

*Sia $\sigma \in C^\infty(\Omega, \Omega)$ un'involuzione che conserva la misura. Assumiamo che tutti i punti critici di (**??**) siano isolati.*

1) *Se $\sigma$ è una simmetria di (**??**), allora per ogni $j \in \mathbb{N}$,*

$$D^{(j)}(\sigma(z)) = D^{(j)}(z).$$

2) *Se $\sigma$ è una reversibilità di (**??**), allora per ogni $j \in \mathbb{N}$,*

$$D^{(j)}(\sigma(z)) = (-1)^{j+1} D^{(j)}(z).$$

# $\sigma$-invarianza degli insiemi di livello delle $D^{(j)}(z)$

Corollario

*Sia $\sigma \in C^{\infty}(\Omega, \Omega)$ un'involuzione che conserva la misura. Assumiamo che tutti i punti critici di (**??**) siano isolati. Allora:*

1) *Se $\sigma$ è una simmetria di (**??**), allora per ogni $j \in \mathbb{N}$, ogni insieme di livello $D^{(j)}(z) = L$ è $\sigma$-invariante.*
2) *Se $\sigma$ è una reversibilità di (**??**), allora per ogni $j \in \mathbb{N}$, ogni insieme di livello $D^{(2j+1)}(z) = L$ è $\sigma$-invariante. Inoltre per ogni $j \in \mathbb{N}$, ogni insieme di livello $\left(D^{(2j)}(z)\right)^2 = L$ è $\sigma$-invariante.*

*In particolare, sia per le simmetrie che per le reversibilità, per ogni $j \in \mathbb{N}$ l'insieme $D^{(j)}(z) = 0$ è $\sigma$-invariante.*

# Localizzazione dei punti fissi di $\sigma$

### Corollario

*Sia* $\sigma \in C^\infty(\Omega, \Omega)$ *un'involuzione che conserva la misura. Assumiamo che tutti i punti critici di (**??**) siano isolati. Se* $\sigma$ *è una reversibilità di (**??**), allora per ogni* $j \in \mathbb{N}$ *l'insieme* $D^{(2j)}(z) = 0$ *contiene tutti i punti fissi di* $\sigma$*.*

# Localizzazione dei punti fissi di $\sigma$

## Corollario

*Sia $\sigma \in C^\infty(\Omega, \Omega)$ un'involuzione che conserva la misura. Assumiamo che tutti i punti critici di (**??**) siano isolati. Se $\sigma$ è una reversibilità di (**??**), allora per ogni $j \in \mathbb{N}$ l'insieme $D^{(2j)}(z) = 0$ contiene tutti i punti fissi di $\sigma$.*

In particolare, l'insieme dei punti fissi di $\sigma$ è contenuto nell'insieme di divergenza nulla del campo vettoriale.

# Localizzazione dei punti fissi di $\sigma$

## Corollario

*Sia $\sigma \in C^\infty(\Omega, \Omega)$ un'involuzione che conserva la misura. Assumiamo che tutti i punti critici di (**??**) siano isolati. Se $\sigma$ è una reversibilità di (**??**), allora per ogni $j \in \mathbb{N}$ l'insieme $D^{(2j)}(z) = 0$ contiene tutti i punti fissi di $\sigma$.*

In particolare, l'insieme dei punti fissi di $\sigma$ è contenuto nell'insieme di divergenza nulla del campo vettoriale.

Questo corollario non vale per le simmetrie. L'equazione $\dot{x} = -x$ ha la simmetria $\sigma(x) = -x$, che ha un unico punto fisso in $x = 0$, ma la divergenza è $1 \neq 0$.

# Localizzazione dei punti fissi di $\sigma$

In generale l'insieme dei punti fissi di $\sigma$ non coincide con l'insieme di divergenza nulla del campo. Il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = y^2, \end{cases} \tag{4}$$

è reversibile rispetto all'involuzione $\sigma(x, y) = (-x, -y)$, che ha un unico punto fisso nell'origine, ma l'insieme di divergenza nulla è la retta di equazione $x + y = 0$.

# Selezioni e la mappa $\Delta$

Diciamo che una mappa strettamente crescente $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{N}$ è una selezione. Data una selezione, definiamo una mappa $\Delta_\pi$ on $\Omega$ come segue:

$$\Delta_\pi(z) = \left( D^{(\pi(1))}(z), \ldots, D^{(\pi(n))}(z) \right). \tag{5}$$

# Selezioni e la mappa $\Delta$

Diciamo che una mappa strettamente crescente $\pi : \{1, \dots, n\} \to \mathbb{N}$ è una selezione. Data una selezione, definiamo una mappa $\Delta_\pi$ on $\Omega$ come segue:

$$\Delta_\pi(z) = \left( D^{(\pi(1))}(z), \dots, D^{(\pi(n))}(z) \right). \tag{5}$$

La scelta più semplice consiste nel prendere $\pi(j) = j - 1$, ottenendo

$$\Delta_\pi(z) = \left( D(z), \dot{D}(z), \dots, D^{(n-1)}(z) \right), \tag{6}$$

mappa le cui componenti sono $D(z)$ e le prime $n-1$ derivative di $D(z)$ lungo le soluzioni di (**??**). In questo caso omettiamo l'indice $\pi$, scrivendo solo $\Delta(z)$, piuttosto che $\Delta_\pi(z)$. Se $n = 2$, abbiamo

$$\Delta(z) = \left( D(z), \dot{D}(z) \right).$$

# Selezioni e la mappa $\Delta$

For every $\pi$ as above, we define the sign matrix $S_\pi$ of $\pi$ as the $n \times n$ diagonal matrix such that

$$a_{jj} = (-1)^{\pi(j)+1}.$$

If $\pi(j) = j - 1$ one has, for $n = 2, 3$,

$$S_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

# Selezioni e la mappa $\Delta$

**Corollario**

*Sia $\sigma \in C^\infty(\Omega, \Omega)$ un'involuzione che conserva la misura.*

1) *Se $\sigma$ è una simmetria di (**??**), allora per ogni selezione $\pi$,*

$$\Delta_\pi(\sigma(z)) = \Delta_\pi(z).$$

2) *Se $\sigma$ è una reversibilità di (**??**), allora per ogni selezione $\pi$,*

$$\Delta_\pi(\sigma(z)) = S_\pi \cdot \Delta_\pi(z).$$

# Selezioni e la mappa $\Delta$

## Corollario

*Sia $\sigma \in C^\infty(\Omega, \Omega)$ un'involuzione che conserva la misura, e assumiamo che (**??**) abbia punti critici isolati. Se esistono una selezione $\pi$ e $z \neq \sigma(z)$ tali che $\Delta_\pi$ è localmente invertibile in $z$ ed in $\sigma(z)$, abbiamo:*

1) *Se $\sigma$ è una simmetria di (**??**):*

$$\sigma(z) = \left(\Delta_\pi^{\sigma(z)}\right)^{-1}\left(\Delta_\pi^z(z)\right).$$

2) *Se $\sigma$ è una reversibilità di (**??**):*

$$\sigma(z) = \left(\Delta_\pi^{\sigma(z)}\right)^{-1}\left(S_\pi \cdot \Delta_\pi^z(z)\right).$$

# Selezioni e la mappa $\Delta$

### Corollario

*Assumiamo che $n \geq 2$, (**??**) abbia punti critici isolati e $\sigma \in C^\infty(\Omega, \Omega)$ sia una simmetria o reversibilità che conserva la misura. Sia $\pi$ una selezione tale che $\Delta_\pi(\sigma(z)) = \Delta_\pi(z)$ per ogni $z \in \Omega$. Se $z_0$ è $\sigma$-fisso and $\sigma$ è non banale in ogni intorno di $z_0$, allora la mappa $\Delta_\pi$ non è localmente invertibile in $z_0$.*

# Un esempio

Consideriamo il sistema, equivalente ad un'equazione di Liénard:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x^2 \\ \dot{y} = -g(x). \end{cases} \tag{7}$$

# Un esempio

Consideriamo il sistema, equivalente ad un'equazione di Liénard:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x^2 \\ \dot{y} = -g(x). \end{cases} \tag{7}$$

Abbiamo:

$$\Delta(x, y) = (D, \dot{D}) = (2x, 2y + 2x^2).$$

# Un esempio

Consideriamo il sistema, equivalente ad un'equazione di Liénard:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x^2 \\ \dot{y} = -g(x). \end{cases} \tag{7}$$

Abbiamo:

$$\Delta(x, y) = (D, \dot{D}) = (2x, 2y + 2x^2).$$

Se esiste una simmetria $\sigma(x, y)$ che conserva l'area, ponendo $\sigma(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, abbiamo

$$\begin{cases} 2x_2 = D(x_2, y_2) = D(x_1, y_1) = 2x_1 \\ 2y_2 + 2x_2^2 = \dot{D}(x_2, y_2) = \dot{D}(x_1, y_1) = 2y_1 + 2x_1^2. \end{cases}$$

# Un esempio

Risolvendo il sistema algebrico, otteniamo $(x_2, y_2) = (x_1, y_1)$, ovvero l'unica simmetria che conserva l'area è l'identità.

# Un esempio

Risolvendo il sistema algebrico, otteniamo $(x_2, y_2) = (x_1, y_1)$, ovvero l'unica simmetria che conserva l'area è l'identità.

Se esiste una reversibilità $\sigma(x, y)$ che conserva l'area, ponendo $\sigma(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, abbiamo

$$\begin{cases} 2x_2 = D(x_2, y_2) = -D(x_1, y_1) = -2x_1 \\ 2y_2 + 2x_2^2 = \dot{D}(x_2, y_2) = \dot{D}(x_1, y_1) = 2y_1 + 2x_1^2. \end{cases}$$

# Un esempio

Risolvendo il sistema algebrico, otteniamo $(x_2, y_2) = (x_1, y_1)$, ovvero l'unica simmetria che conserva l'area è l'identità.

Se esiste una reversibilità $\sigma(x, y)$ che conserva l'area, ponendo $\sigma(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, abbiamo

$$\begin{cases} 2x_2 = D(x_2, y_2) = -D(x_1, y_1) = -2x_1 \\ 2y_2 + 2x_2^2 = \dot{D}(x_2, y_2) = \dot{D}(x_1, y_1) = 2y_1 + 2x_1^2. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema algebrico, otteniamo $(x_2, y_2) = (-x_1, y_1)$, ovvero l'unica involuzione che conserva l'area che verifica la condizione del teorema **??** è $\sigma(x, y) = (-x, y)$. Se $g(x)$ è dispari la condizione (**??**) è verificata, quindi $\sigma(x, y) = (-x, y)$ è l'unica reversibilità del sistema che conserva l'area.

# Simmetrie e reversibilità del sistema di Lotka-Volterra

Il sistema di Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by) \\ \dot{y} = y(cx - d) \end{cases} \qquad a, b, c, d > 0. \tag{8}$$

# Simmetrie e reversibilità del sistema di Lotka-Volterra

Il sistema di Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by) \\ \dot{y} = y(cx - d) \end{cases} \qquad a, b, c, d > 0. \tag{8}$$

**Teorema**

*Il sistema (**??**), con $bc \neq 0$, ha una APS se e solo se*

$$a + d = 0.$$

*In tal caso, l'unica APS di (**??**) è*

$$\sigma(x, y) = \left(-\frac{by}{c}, -\frac{cx}{b}\right).$$

# Simmetrie e reversibilità del sistema di Lotka-Volterra

Teorema

*Il sistema (**??**), con $bc \neq 0$, ha una APR se e solo se*

$$a - d = 0.$$

*In tal caso, l'unica APR di (**??**) è*

$$\sigma(x, y) = \left( \frac{by}{c}, \frac{cx}{b} \right).$$

# Sistemi di Liénard

Consideriamo sistemi di Liénard nel piano di fase:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -g(x) - yf(x), \end{cases} \tag{9}$$

# Sistemi di Liénard

Consideriamo sistemi di Liénard nel piano di fase:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -g(x) - yf(x), \end{cases} \tag{9}$$

**Theorem**

*Siano $f, g \in C^\infty((a,b), \mathbb{R})$, $a < 0 < b$, $f'(x) < 0$ in $(a, 0)$, $f'(x) > 0$ in $(0, b)$, $xg(x) > 0$ in $(a,b) \setminus \{0\}$. Allora il sistema (**??**) ha un'APS non banale $\sigma$ se e solo se:*

$$f(-x) = f(x), \qquad g(-x) = -g(x).$$

*In tal caso, l'unica APS è*

$$\sigma(x, y) = (-x, -y).$$

## Sistemi di Liénard

### Teorema

*Siano* $f, g \in C^\infty\big((a,b), \mathbb{R}\big)$, $a < 0 < b$, *con* $f(0) = 0$, $f'(x)$ *e* $xg(x)$ *entrambe positive in* $(a,b) \setminus \{0\}$. *Allora il sistema (**??**) ha un APR se e solo se:*

$$f(-x) = -f(x), \qquad g(-x) = -g(x).$$

*In tal caso, l'unica APR è*

$$\sigma(x,y) = (-x,y).$$

# Sistemi y-quadratici

$$\begin{cases} \dot{x} = r(x)y + s(x) \\ \dot{y} = -g(x) - f(x)y - h(x)y^2. \end{cases} \tag{10}$$

# Sistemi y-quadratici

$$\begin{cases} \dot{x} = r(x)y + s(x) \\ \dot{y} = -g(x) - f(x)y - h(x)y^2. \end{cases} \tag{10}$$

**Theorem**

*Siano $r, s, f, g, h \in C^1(a, b)$, con $a < 0 < b$. Se per ogni $x \in (a, b)$,*

$$r(x) \neq 0, \qquad r'(x) - 2h(x) \neq 0,$$

*e*

$$r(x)f(x) - 2h(x)s(x) - s'(x)r(x) + s(x)r'(x) = 0, \tag{11}$$

*allora il sistema (**??**) è $\sigma$-reversibile, con*

$$\sigma(x, y) = \left(x, 2\,\frac{f(x) - s'(x)}{r'(x) - 2h(x)} - y\right) = \left(x, -\frac{2s(x)}{r(x)} - y\right).$$

# Sistemi y-quadratici

Il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x^2 \\ \dot{y} = -x - 2xy(1+x) - y^2. \end{cases} \tag{12}$$

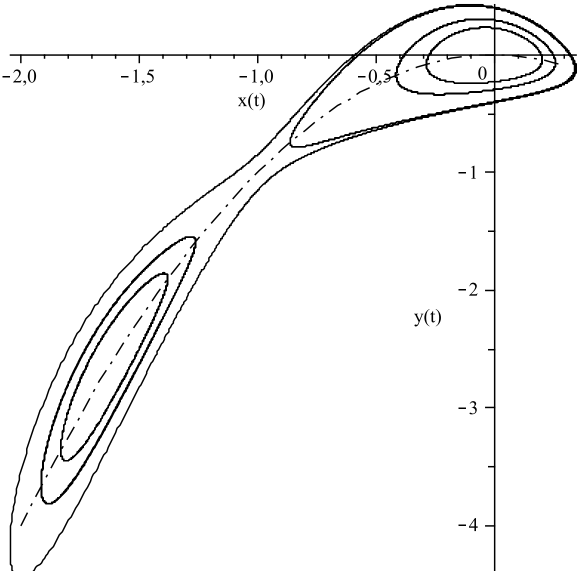
è $\sigma$-reversibile, con

$$\sigma(x, y) = (x, -2x^2 - y).$$

Questo sistema ha due centri.

# Sistemi y-quadratici

Figure: Alcune orbite del sistema (**??**)



# Sistemi y-quadratici

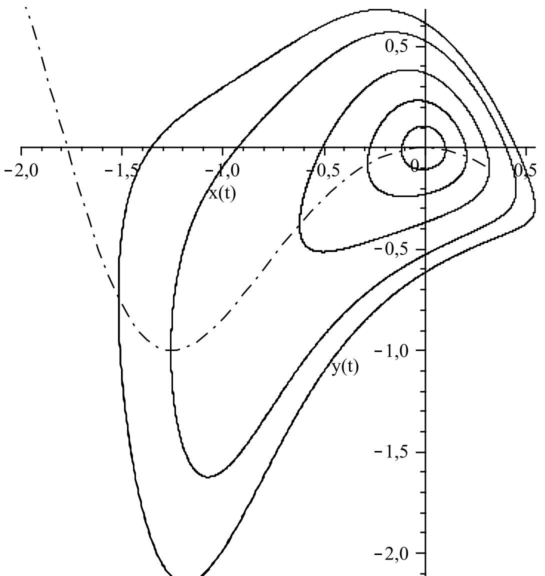
$$\begin{cases} \dot{x} = y + \sin x^2 \\ \dot{y} = -x - (2\sin x^2 + 2x\cos x^2)y - y^2. \end{cases} \tag{13}$$

è $\sigma$-reversibile, con

$$\sigma(x, y) = (x, -2\sin x^2 - y).$$

# Sistemi y-quadratici

Figure: Alcune orbite del sistema (**??**)



# Fine del seminario

GRAZIE