Molteplicità di oscillazioni forzate per equazioni differenziali del second'ordine con ritardo

Maria Patrizia Pera
Università di Firenze

GEDO2018
Ancona, 27–29 Settembre 2018

Equazione del second'ordine con ritardo

Consideriamo l'equazione del second'ordine con ritardo finito $\tau > 0$ su una varietà $M \subseteq \mathbb{R}^k$ di classe C^∞ senza bordo

$$\ddot{x}_\pi(t) = h\big(x(t), \dot{x}(t)\big) + \lambda f\big(t, x(t), \dot{x}(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau)\big), \quad (1)$$

dove

- $\ddot{x}_\pi(t)$ è la componente tangenziale (o parallela) dell'accelerazione $\ddot{x}(t) \in \mathbb{R}^k$ nel punto $x(t) \in M$
- $\lambda \geq 0$

Equazione del second'ordine con ritardo

Consideriamo l'equazione del second'ordine con ritardo finito $\tau > 0$ su una varietà $M \subseteq \mathbb{R}^k$ di classe C^∞ senza bordo

$$\ddot{x}_\pi(t) = h\big(x(t), \dot{x}(t)\big) + \lambda f\big(t, x(t), \dot{x}(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau)\big), \quad (1)$$

dove

- $\ddot{x}_\pi(t)$ è la componente tangenziale (o parallela) dell'accelerazione $\ddot{x}(t) \in \mathbb{R}^k$ nel punto $x(t) \in M$
- $\lambda \geq 0$
- $h\colon TM \to \mathbb{R}^k$ e $f: \mathbb{R} \times TM \times TM \to \mathbb{R}^k$ campi vettoriali continui e tangenti ad M, i.e.

$$\forall (t, p, v, q, w) \in \mathbb{R} \times TM \times TM$$
$$h(p, v) \in T_pM, \quad f(t, p, v, q, w) \in T_pM$$

Equazione del second'ordine con ritardo

Consideriamo l'equazione del second'ordine con ritardo finito $\tau > 0$ su una varietà $M \subseteq \mathbb{R}^k$ di classe C^∞ senza bordo

$$\ddot{x}_\pi(t) = h\big(x(t), \dot{x}(t)\big) + \lambda f\big(t, x(t), \dot{x}(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau)\big), \quad (1)$$

dove

- $\ddot{x}_\pi(t)$ è la componente tangenziale (o parallela) dell'accelerazione $\ddot{x}(t) \in \mathbb{R}^k$ nel punto $x(t) \in M$
- $\lambda \geq 0$
- $h \colon TM \to \mathbb{R}^k$ e $f \colon \mathbb{R} \times TM \times TM \to \mathbb{R}^k$ campi vettoriali continui e tangenti ad M, i.e.
$$\forall (t, p, v, q, w) \in \mathbb{R} \times TM \times TM$$
$$h(p, v) \in T_pM, \qquad f(t, p, v, q, w) \in T_pM$$
- f T-periodico in t

Equazione del second'ordine con ritardo

- risultati di biforcazione globale
- molteplicità di soluzioni T-periodiche
- applicazioni a $M = S^2$ e $M = \mathbb{R}$
- referenze
  - Calamai-P.-Spadini, Adv. Nonlinear Stud. (2018)

Equazione del second'ordine con ritardo

- risultati di biforcazione globale
- molteplicità di soluzioni T-periodiche
- applicazioni a $M = S^2$ e $M = \mathbb{R}$
- referenze
  - Calamai-P.-Spadini, Adv. Nonlinear Stud. (2018)
  - ritardo finito su **varietà differenziabili**: Oliva (1976)
  - ritardo funzionale **in spazi euclidei**: Hale-Kato (1978), Hino-Murakami-Naito (1991), Oliva-Rocha (2010), Novo-Obaya-Sanchez (2007)

Equazione del second'ordine con ritardo

- risultati di biforcazione globale
- molteplicità di soluzioni T-periodiche
- applicazioni a $M = S^2$ e $M = \mathbb{R}$
- referenze
  - Calamai-P.-Spadini, Adv. Nonlinear Stud. (2018)
  - ritardo finito su **varietà differenziabili**: Oliva (1976)
  - ritardo funzionale **in spazi euclidei**: Hale-Kato (1978), Hino-Murakami-Naito (1991), Oliva-Rocha (2010), Novo-Obaya-Sanchez (2007)
  - ritardo funzionale su **varietà differenziabili** : Benevieri-Calamai-Furi-P. DCDS (esistenza, unicità, dipendenza continua), BVP (2013), ANS (2013), RIMUT (2017)

Equazione del second'ordine con ritardo

Denotiamo con

$$C^1_T(M) = \{x \colon \mathbb{R} \to M,\ x \in C^1 \text{ e T-periodica}\}$$

Denotiamo con

$$C^1_T(M) = \{x\colon \mathbb{R} \to M,\ x \in C^1 \text{ e T-periodica}\}$$

Definizione

$(\lambda, x) \in [0, +\infty) \times C^1_T(M)$ *è detta una coppia T-periodica di*

$$\ddot{x}_\pi(t) = h\big(x(t), \dot{x}(t)\big) + \lambda\, f\big(t, x(t), \dot{x}(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau)\big)$$

se x è una soluzione dell'equazione corrispondente a λ

Denotiamo con

$$C^1_T(M) = \{x\colon \mathbb{R} \to M,\ x \in C^1 \text{ e T-periodica}\}$$

Definizione

$(\lambda, x) \in [0, +\infty) \times C^1_T(M)$ è detta una coppia T-periodica di

$$\ddot{x}_\pi(t) = h\big(x(t), \dot{x}(t)\big) + \lambda f\big(t, x(t), \dot{x}(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau)\big)$$

se x è una soluzione dell'equazione corrispondente a λ

Per $\lambda = 0$, una coppia T-periodica $(0, x)$ con $x(t) = p \in M$, $\forall t$, è detta coppia banale
(la denotiamo con $(0, p^-)$)

Equazione del second'ordine con ritardo

Denotiamo con

$$C^1_T(M) = \{x\colon \mathbb{R} \to M,\ x \in C^1 \text{ e T-periodica}\}$$

Definizione

$(\lambda, x) \in [0, +\infty) \times C^1_T(M)$ è detta una coppia T-periodica di

$$\ddot{x}_\pi(t) = h\big(x(t), \dot{x}(t)\big) + \lambda f\big(t, x(t), \dot{x}(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau)\big)$$

se x è una soluzione dell'equazione corrispondente a λ

Per $\lambda = 0$, una coppia T-periodica $(0, x)$ con $x(t) = p \in M$, $\forall t$, è detta coppia banale
(la denotiamo con $(0, p^-)$)
Ci possono essere coppie $(0, x)$ non banali.

Denotiamo con

$$C^1_T(M) = \{x\colon \mathbb{R} \to M,\ x \in C^1 \text{ e T-periodica}\}$$

Definizione

$(\lambda, x) \in [0, +\infty) \times C^1_T(M)$ è detta una coppia T-periodica di

$$\ddot{x}_\pi(t) = h\big(x(t), \dot{x}(t)\big) + \lambda f\big(t, x(t), \dot{x}(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau)\big)$$

se x è una soluzione dell'equazione corrispondente a λ

Per $\lambda = 0$, una coppia T-periodica $(0, x)$ con $x(t) = p \in M$, $\forall t$, è detta coppia banale
(la denotiamo con $(0, p^-)$)
Ci possono essere coppie $(0, x)$ non banali.
Ad esempio, se $M = \mathbb{R}$ e $h(p, v) = -p$

Rami di biforcazione globale

Teorema

Sia Ω un aperto di $[0,+\infty) \times C^1_T(M)$ e sia M chiusa in $\mathbb{R}^k$. Se

$$\deg(\, h|_M \,, \Omega \cap M) \neq 0 \,,$$

allora esiste in Ω ramo di biforcazione globale

Ramo di biforcazione globale significa un connesso Γ di coppie T-periodiche e non banali tali che

- $\bar{\Gamma} \cap \{(0, p^-) \in \Omega : \; h|_M \,(p) = 0\} \neq \emptyset$
- $\bar{\Gamma}$ è non limitata o $\bar{\Gamma} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$.

Rami di biforcazione globale

Corollari

- U aperto di M e $\deg(h|_M , U) \neq 0 \implies$ esiste un connesso la cui chiusura contiene $(0, p^-)$, $p \in U$ e $h|_M (p) = 0$, ed è
  - i) o non limitato
  - ii) o contiene $(0, q^-)$, $q \notin U$

  [ramo globale alla Rabinowitz]
- M compatta con caratteristica di Eulero-Poincaré $\chi(M) \neq 0$ $\implies$ esiste ramo di biforcazione globale non limitato
  [si usa il teorema di Poincaré-Hopf]

Rami di biforcazione globale

Metodi

- *indice di punto fisso* per applicazioni localmente compatte negli ANR metrici (Granas, Nussbaum, Brown)

Rami di biforcazione globale

Metodi

- *indice di punto fisso* per applicazioni localmente compatte negli ANR metrici (Granas, Nussbaum, Brown)
- *grado di un campo vettoriale tangente*, o *caratteristica di Eulero* o *rotazione* (Milnor, Hirsch, Guillemin-Pollack, Furi-P.)

T-risonanza

Consideriamo l'equazione non perturbata $(\lambda = 0)$

$$\ddot{x}_\pi(t) = h\big(x(t), \dot{x}(t)\big), \tag{2}$$

dove $h\colon TM \to \mathbb{R}^k$ è tangente a M (come in (1)) e di classe C^1.

Consideriamo l'equazione non perturbata $(\lambda = 0)$

$$\ddot{x}_\pi(t) = h\big(x(t), \dot{x}(t)\big), \tag{2}$$

dove $h\colon TM \to \mathbb{R}^k$ è tangente a M (come in (1)) e di classe C^1.

Definizione

Dato $T > 0$, un punto $p \in M$ tale che $h(p,0) = 0$ si dice *T-risonante* *per (2) se l'equazione linearizzata su T_pM*

$$\ddot{z} = \partial_1 h(p,0)z + \partial_2 h(p,0)\dot{z}.$$

ammette soluzioni T-periodiche non nulle.

T-risonanza

Consideriamo l'equazione non perturbata $(\lambda = 0)$

$$\ddot{x}_\pi(t) = h\big(x(t), \dot{x}(t)\big), \tag{2}$$

dove $h\colon TM \to \mathbb{R}^k$ è tangente a M (come in (1)) e di classe C^1.

Definizione

Dato $T > 0$, un punto $p \in M$ tale che $h(p, 0) = 0$ si dice T-risonante per (2) se l'equazione linearizzata su T_pM

$$\ddot{z} = \partial_1 h(p, 0)z + \partial_2 h(p, 0)\dot{z}.$$

ammette soluzioni T-periodiche non nulle.

Se non è vero, si dice che p è *non* *T-risonante* per (2)

Osservazione

Un semplice criterio è il seguente:
p è T-risonante se esiste $\ell \in \mathbb{Z}$ tale che

$$\det\left(\partial_1 h(p,0) + \frac{2\pi\ell i}{T}\partial_2 h(p,0) + \left(\frac{2\pi\ell}{T}\right)^2 I\right) = 0,$$

dove I è l'identità su T_pM e i l'unità immaginaria.

Osservazione

Un semplice criterio è il seguente:
p è T-risonante se esiste $\ell \in \mathbb{Z}$ tale che

$$\det\left(\partial_1 h(p,0) + \frac{2\pi\ell i}{T}\partial_2 h(p,0) + \left(\frac{2\pi\ell}{T}\right)^2 I\right) = 0,$$

dove I è l'identità su T_pM e i l'unità immaginaria.
In particolare, se p è non T-risonante, ponendo $\ell = 0$ si ha $\det(\partial_1 h(p,0)) \neq 0$ *e quindi* $\mathrm{i}\left(h|_M, p\right) = \pm 1$.

Teorema

Supponiamo che

- *siano* $p_1, \dots, p_{n-1}$ *zeri di* $h|_M$ *non* T*-risonanti e tali che*

$$\sum_{j=1}^{n-1} \mathrm{i}\,(\, h|_M \,, p_j) \neq \deg\,(\, h|_M \,, M)\,. \tag{3}$$

- *l'equazione non perturbata* $\ddot{x}_\pi = h(x, \dot{x})$ *non ammetta (in* $C^1_T(M)$*) connessi non limitati di soluzioni* T*- periodiche che incontrano* $(\, h|_M)^{-1}\,(0)$.

Allora, per $\lambda > 0$ *sufficientemente piccolo, l'equazione* (1) *ammette almeno* n *soluzioni di periodo* T.

Teorema

Supponiamo che

- *siano* $p_1, \ldots, p_{n-1}$ *zeri di* $h|_M$ *non* T*-risonanti e tali che*

$$\sum_{j=1}^{n-1} \mathrm{i}\,(\,h|_M\,, p_j) \neq \deg\,(\,h|_M\,, M)\,. \tag{3}$$

- *l'equazione non perturbata* $\ddot{x}_\pi = h(x, \dot{x})$ *non ammetta (in* $C^1_T(M)$*) connessi non limitati di soluzioni* T*- periodiche che incontrano* $(\,h|_M)^{-1}(0)$.

Allora, per $\lambda > 0$ *sufficientemente piccolo, l'equazione* (1) *ammette almeno* n *soluzioni di periodo* T.

Le n soluzioni T-periodiche sono distinte in $C^1_T(M)$
Non si può dire nulla delle loro immagini

Specifichiamo il campo tangente $h(p, v)$ considerando

$$\ddot{x}_\pi(t) = g\big(x(t)\big) - \nu\big(|\dot{x}(t)|\big)\dot{x}(t) + \lambda f\big(t, x(t), \dot{x}(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau)\big), \tag{4}$$

$g \colon M \to \mathbb{R}^k$ tangente a M
$\nu \colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ tale che
$\nu(s) > 0 \, \forall s > 0, \quad \liminf_{s\to\infty} \nu(s) = \ell > 0.$

Specifichiamo il campo tangente $h(p,v)$ considerando

$$\ddot{x}_\pi(t) = g\big(x(t)\big) - \nu\big(|\dot{x}(t)|\big)\dot{x}(t) + \lambda f\big(t, x(t), \dot{x}(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau)\big), \tag{4}$$

$g\colon M \to \mathbb{R}^k$ tangente a M
$\nu\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ tale che
$\nu(s) > 0\,\forall s > 0, \quad \liminf_{s\to\infty} \nu(s) = \ell > 0.$

Corollario

Sia M compatta, f limitata e siano $p_1, \ldots, p_{n-1}$ zeri di g non T-risonanti e tali che

$$\sum_{j=1}^{n-1} \mathrm{i}\,(g, p_j) \neq \chi(M).$$

Allora, per $\lambda > 0$ sufficientemente piccolo, l'equazione (4) *ammette n soluzioni di periodo T con immagini a due a due non coincidenti.*

Alcune osservazioni:

- quando M è compatta l'ipotesi (3) diventa

$$\sum_{j=1}^{n-1} \mathrm{i}\,(g, p_j) \neq \chi(M)$$

essendo, per il teorema di Poincaré-Hopf, $\deg(g, M) = \chi(M)$

Alcune osservazioni:

- quando M è compatta l'ipotesi (3) diventa

$$\sum_{j=1}^{n-1} \mathrm{i}\,(g, p_j) \neq \chi(M)$$

essendo, per il teorema di Poincaré-Hopf, $\deg(g, M) = \chi(M)$

- se $\nu(s) = \kappa > 0$ si ha l'attrito viscoso $-\kappa \dot{x}(t)$

Applicazioni al pendolo sferico

Sia $M = S = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = r\right\}$. Consideriamo l'equazione

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) = &- m\frac{|\dot{x}(t)|^2}{r^2}x(t) + g(x(t)) - \eta\nu\left(|\dot{x}(t)|\right)\dot{x}(t) + \\ &+ \lambda f\left(t, x(t), \dot{x}(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau)\right). \end{aligned}$$

Sia $M = S = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = r\}$. Consideriamo l'equazione

$$m\ddot{x}(t) = -\, m\frac{|\dot{x}(t)|^2}{r^2}x(t) + g(x(t)) - \eta\nu\left(|\dot{x}(t)|\right)\dot{x}(t) + \\ + \lambda f\left(t, x(t), \dot{x}(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau)\right).$$

Rappresenta il moto di una particella di massa m, vincolata ad S e soggetta a tre forze:

- una forza posizionale g
- un eventuale attrito ($\eta = 1$ o $\eta = 0$)
- una forza T-periodica limitata dipendente anche dal passato del sistema (ritardo infinito Calamai-P.-Spadini, Nonlinear Analysis (2017)).

Il termine $R(p, v) = -m(|v|^2/r^2)p$ rappresenta la reazione vincolare. È noto inoltre che $\chi(S) = 2$.

Applicazioni al pendolo sferico

Con le nostre notazioni, e supponendo $m = 1$, si ottiene

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}_\pi(t) = & g(x(t)) - \eta\nu\left(|\dot{x}(t)|\right)\dot{x}(t) + \\
& + \lambda f\left(t, x(t), \dot{x}(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau)\right).
\end{aligned}
$$

Con le nostre notazioni, e supponendo $m = 1$, si ottiene

$$\begin{aligned}\ddot{x}_\pi(t) = & g(x(t)) - \eta\nu\left(|\dot{x}(t)|\right)\dot{x}(t) + \\ & + \lambda f\big(t, x(t), \dot{x}(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau)\big).\end{aligned}$$

Caso importante: g componente tangenziale della forza gravitazionale, i.e.

$$g_{\mathfrak{g}}(x_1, x_2, x_3) := \frac{\mathfrak{g}}{r^2}\left(x_3 x_1, x_3 x_2, -(r^2 - x_3^2)\right),$$

dove $p = (x_1, x_2, x_3) \in S$ e $\mathfrak{g}$ è una costante che esprime l'intensità del campo gravitazionale. Gli zeri di $g_{\mathfrak{g}}$ sono i due poli $(0, 0, r)$ e $(0, 0, -r)$ e il polo nord è non T-risonante. Si ha quindi

Con le nostre notazioni, e supponendo $m = 1$, si ottiene

$$\begin{aligned}\ddot{x}_\pi(t) =& g(x(t)) - \eta\nu\left(|\dot{x}(t)|\right)\dot{x}(t) + \\ &+ \lambda f\big(t, x(t), \dot{x}(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau)\big).\end{aligned}$$

Caso importante: g componente tangenziale della forza gravitazionale, i.e.

$$g_{\mathfrak{g}}(x_1, x_2, x_3) := \frac{\mathfrak{g}}{r^2}\big(x_3x_1, x_3x_2, -(r^2 - x_3^2)\big),$$

dove $p = (x_1, x_2, x_3) \in S$ e $\mathfrak{g}$ è una costante che esprime l'intensità del campo gravitazionale. Gli zeri di $g_{\mathfrak{g}}$ sono i due poli $(0, 0, r)$ e $(0, 0, -r)$ e il polo nord è non T-risonante. Si ha quindi

Corollario

Sia $g = g_{\mathfrak{g}}$. Allora per $\lambda > 0$ sufficientemente piccolo si hanno almeno due soluzioni T-periodiche con immagini non coincidenti.

Applicazioni al caso scalare

Caso $M = \mathbb{R}$ e h independente da $\dot{x}$ (o con al più un termine di attrito)

Essendo in $\mathbb{R}$ si può usare un ipotesi più debole della non T-risonanza (non T-isocronismo) o addirittura non metterla se c'è più di uno zero o se c'è l'attrito

Caso $M = \mathbb{R}$ e h independente da $\dot{x}$ (o con al più un termine di attrito)

Essendo in $\mathbb{R}$ si può usare un ipotesi più debole della non T-risonanza (non T-isocronismo) o addirittura non metterla se c'è più di uno zero o se c'è l'attrito

Zanolin, Fonda, Omari, Boscaggin, Garrione, Feltrin, Rebelo, Mawhin

Furi-P.-Spadini (2001) per EDO

Calamai-P.-Spadini, Math. Meth. Appl. Sci. (2018) per equazioni con ritardo di tipo funzionale, ma serve più regolarità sul termine forzante f