

Profili viscosi in modelli di movimenti collettivi

Luisa Malaguti

Università di Modena e Reggio Emilia
luisa.malaguti@unimore.it - www.unimore.it

CONVEGNO GEDO
Ancona, 27 settembre 2018

Profili viscosi in modelli di movimenti collettivi

Luisa Malaguti

Università di Modena e Reggio Emilia
luisa.malaguti@unimore.it - www.unimore.it

CONVEGNO GEDO
Ancona, 27 settembre 2018

In collaborazione con **Andrea Corli**
Università degli studi di Ferrara

Interesse per lo studio delle **dinamiche di pedoni**:

- (a) **scongiurare** eventi catastrofici (Jamarat Bridge a Mina, London Millennium Bridge);
- (b) **progettare** luoghi pubblici potenzialmente molto affollati (stazioni ferroviarie o della metropolitana, aeroporti, stadi, supermercati, ecc.) rispettando criteri di sicurezza ed efficienza;
- (c) ...

Modelli dinamici sufficientemente semplici, ma in grado di catturare e **simulare** le principali caratteristiche di questi fenomeni dinamici.

Considerazioni analoghe valgono per lo studio del **traffico veicolare**

Introduzione dei modelli matematici

- **habitat** unidimensionale 
- modelli **macroscopici**: $\rho = \rho(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ una densità.

Introduzione dei modelli matematici

- habitat unidimensionale 
- modelli macroscopici: $\rho = \rho(t, x)$, $t \geq 0, x \in \mathbb{R}$ una densità.

$$\rho_t + (\rho v(\rho))_x = 0, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}$$

- $\rho \in [0, 1]$ massima densità normalizzata
- $v(\rho)$ velocità solitamente decrescente e con $v(1) = 0$
- **[Lighthill-Whitham-Richards, 1955]**

Introduzione dei modelli matematici

- **habitat** unidimensionale 
- modelli **macroscopici**: $\rho = \rho(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ una densità.

$$\rho_t + (\rho v(\rho))_x = D_0 \rho_{xx}, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}$$

- $\rho \in [0, 1]$ massima densità normalizzata
 - $v(\rho)$ velocità solitamente decrescente e con $v(1) = 0$
 - $D_0 \rho_{xx}$ semplice termine di natura diffusiva, $D_0 > 0$
-
- **[Bellomo-Delitala-Coscia, 2012]**
 - **[Cristiani-Piccoli-Tosin, 2014]**
 - **[Rosini, 2013]**

Introduzione dei modelli matematici

- **habitat** unidimensionale 
- modelli **macroscopici**: $\rho = \rho(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ una densità.

$$\rho_t + (\rho v(\rho))_x = D_0 \rho_{xx}, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}$$

- $\rho \in [0, 1]$ massima densità normalizzata
- $v(\rho)$ velocità solitamente decrescente e con $v(1) = 0$
- $D_0 \rho_{xx}$ semplice termine di natura diffusiva, $D_0 > 0$

Problema della scelta del più appropriato termine diffusivo

Un modello di flussi di pedoni con diffusione degenerare

$$\rho_t + (\rho v(\rho))_x = (D(\rho)\rho_x)_x, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}.$$

$$v(\rho) = \bar{v} \left(1 - e^{-\gamma \left(\frac{1}{\rho} - 1 \right)} \right), \quad D(\rho) = -\delta \rho v'(\rho), \quad \rho \in [0, 1].$$

- $v(\rho)$ velocità, \bar{v} : velocità massima
- $\delta > 0$: profondità del campo visivo dei pedoni

I parametri positivi \bar{v} , γ e δ sono ottenuti sperimentalmente

- **[Bruno- Tosin-Tricerri e Venuti, 2011]**

Un modello di flussi di pedoni con diffusione degenera

$$\rho_t + (\rho v(\rho))_x = (D(\rho)\rho_x)_x, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}.$$

$$v(\rho) = \bar{v} \left(1 - e^{-\gamma \left(\frac{1}{\rho} - 1 \right)} \right), \quad D(\rho) = -\delta \rho v'(\rho) = \frac{\delta \bar{v}}{\rho} e^{-\gamma \left(\frac{1}{\rho} - 1 \right)}, \quad \rho \in [0, 1].$$

- $v(\rho)$ velocità, \bar{v} : velocità massima
- $\delta > 0$: profondità del campo visivo dei pedoni
- D è degenere: $D(0) = 0$,
- D è di tipo esponenziale vicino a $\rho = 0$
- $D(\rho) > 0$ per $\rho \in (0, 1]$
- **[Bruno- Tosin-Tricerri e Venuti, 2011]**

Motivazioni per l'introduzione di un termine diffusivo

- ▶ **Evita** la comparsa di *onde di shock* con conseguente accelerazione infinita
- ▶ Consente di introdurre esplicitamente le nozioni di **distanza di anticipazione** e **tempo di reazione**. Solitamente il termine diffusivo è **positivo** in $(0, 1)$. In certi casi risulta **negativo** in un intervallo $(\alpha, \beta) \subset (0, 1)$.

$D > 0$ diffusione
 $D < 0$ aggregazione (panico)

Introduzione di un termine di sorgente

$$\rho_t + (\rho v(\rho))_x = (D(\rho)\rho_x)_x + L(\bar{\rho} - \rho)^\alpha, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}.$$

$$v(\rho) = \bar{v} \left(1 - e^{-\gamma \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\bar{\rho}} \right)} \right), \quad D(\rho) = -\delta \rho v'(\rho), \quad \rho \in [0, 1].$$

- L, α costanti positive

Scopo del termine di sorgente $g(\rho)$ è **descrivere** il fenomeno di ingresso/uscita dall'habitat

- pedoni lungo un corridoio con molte entrate/uscite
- barriere di una metropolitana, casse di un supermercato, piattaforme di una stazione ferroviaria
- spiaggia con ingresso libero

Principali caratteristiche di $g(\rho)$

- $g(1) = 0$: non c'è spazio per ulteriori ingressi quando si sia raggiunta la densità massima
- $g(0) > 0$: in assenza di individui è sempre possibile entrare nell'habitat
- $g(\rho) > 0$ per $\rho \in (0, 1)$.

Trascurato lo studio degli effetti di un termine di sorgente

Il modello generale

$$\rho_t + f(\rho)_x = (D(\rho)\rho_x)_x + g(\rho), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \rho \in [0, 1]$$

Il modello generale

$$\rho_t + f(\rho)_x = (D(\rho)\rho_x)_x + g(\rho), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \rho \in [0, 1]$$

- $f(\rho)$: termine di flusso

Il modello generale

$$\rho_t + f(\rho)_x = (D(\rho)\rho_x)_x + g(\rho), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \rho \in [0, 1]$$

- $f(\rho)$: termine di flusso
- $D(\rho)$: termine diffusivo

Il modello generale

$$\rho_t + f(\rho)_x = (D(\rho)\rho_x)_x + g(\rho), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \rho \in [0, 1]$$

- $f(\rho)$: termine di flusso
- $D(\rho)$: termine diffusivo
- $g(\rho)$: termine di sorgente

Il modello generale

$$\rho_t + f(\rho)_x = (D(\rho)\rho_x)_x + g(\rho), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \rho \in [0, 1]$$

- $f(\rho)$: termine di flusso
- $D(\rho)$: termine diffusivo
- $g(\rho)$: termine di sorgente

$$f, D \in C^1[0, 1], g \in C[0, 1] \text{ con } f(0) = 0$$

Soluzioni con profilo costante

$$(E) \quad \rho_t + f(\rho)_x = (D(\rho)\rho_x)_x + g(\rho), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \rho \in [0, 1]$$

Soluzioni del tipo **onda viaggiante** (traveling wave solutions - TW)

$$\rho(x, t) = \varphi(\xi)$$

$\xi = x - ct$ **variabile** dell'onda

$\varphi(\xi)$: **profilo** dell'onda

c : **velocità** dell'onda **incognita**

Soluzioni con profilo costante

$$(E) \quad \rho_t + f(\rho)_x = (D(\rho)\rho_x)_x + g(\rho), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \rho \in [0, 1]$$

Soluzioni del tipo **onda viaggiante** (traveling wave solutions - TW)

$$\rho(x, t) = \varphi(\xi)$$

$\xi = x - ct$ **variabile** dell'onda

$\varphi(\xi)$: **profilo** dell'onda

c : **velocità** dell'onda **incognita**

Equazione del profilo

$$(D(\varphi)\varphi')' + (c\varphi - f(\varphi))' + g(\varphi) = 0, \quad \xi \in I \subseteq \mathbb{R}, ' = \frac{d}{d\xi}$$

I intervallo aperto

Soluzioni con profilo costante

$$(E) \quad \rho_t + f(\rho)_x = (D(\rho)\rho_x)_x + g(\rho), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \rho \in [0, 1]$$

Soluzioni del tipo **onda viaggiante** (traveling wave solutions - TW)

$$\rho(x, t) = \varphi(\xi) \quad \begin{array}{l} \xi = x - ct \text{ **variabile** dell'onda} \\ \varphi(\xi) : \text{ **profilo** dell'onda} \\ c : \text{ **velocità** dell'onda **incognita**} \end{array}$$

Equazione del profilo- eventualmente verificata in senso debole

$$(D(\varphi)\varphi')' + (c\varphi - f(\varphi))' + g(\varphi) = 0, \quad \xi \in I \subseteq \mathbb{R}, ' = \frac{d}{d\xi}$$

$\varphi: I \rightarrow [0, 1]$ continua, $D(\varphi)\varphi' \in L^1_{\text{loc}}(I)$ e

$$\int_I \{ (D(\varphi(\xi))\varphi'(\xi) - f(\varphi(\xi)) + c\varphi(\xi)) \psi'(\xi) - g(\varphi(\xi))\psi(\xi) \} d\xi = 0, \quad \psi \in C_0^\infty(I)$$

Osservazione: l'equazione del profilo è autonoma \implies se $\varphi(\xi)$ è una TW anche $\varphi(\xi + \xi_0)$, $\xi_0 \in \mathbb{R}$ la è

Soluzioni con profilo costante

$$(E) \quad \rho_t + f(\rho)_x = (D(\rho)\rho_x)_x + g(\rho), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \rho \in [0, 1]$$

Soluzioni del tipo **onda viaggiante** (traveling wave solutions - TW)

$$\rho(x, t) = \varphi(\xi) \quad \begin{array}{l} \xi = x - ct \text{ **variabile** dell'onda} \\ \varphi(\xi): \text{ **profilo** dell'onda} \\ c: \text{ **velocità** dell'onda **incognita**} \end{array}$$

Equazione del profilo

$$(D(\varphi)\varphi')' + (c\varphi - f(\varphi))' + g(\varphi) = 0, \quad \xi \in I \subseteq \mathbb{R}, ' = \frac{d}{d\xi}$$

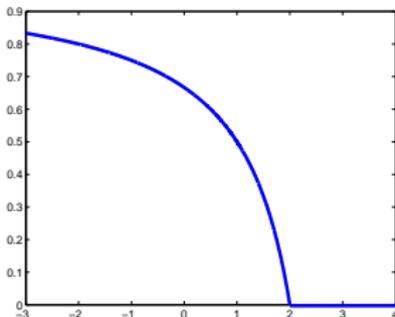
- ▶ **fronte d'onda** - φ monotona, $I = \mathbb{R}$ e φ che collega due stati stazionari di (E)
- ▶ **semifronte (stretto)** - φ monotono (non costante), $I = (-\infty, \varpi)$ o $I = (\varpi, \infty)$ e non si può estendere a tutto \mathbb{R}
- ▶ **(profilo) classico** - φ è differenziabile e $D(\varphi)\varphi'$ è assolutamente continuo $\implies (D(\varphi)\varphi')' + (c\varphi - f(\varphi))' + g(\varphi) = 0$ q.o. in I
- ▶ **(profilo) sharp in ℓ** - esiste $\xi_\ell \in I$, $\varphi(\xi_\ell) = \ell$, φ è classica in $I \setminus \{\xi_\ell\}$ e non differenziabile in ξ_ℓ

Soluzioni con profilo costante

Equazione del profilo

$$(D(\varphi)\varphi')' + (c\varphi - f(\varphi))' + g(\varphi) = 0, \quad \xi \in I \subseteq \mathbb{R}, \quad ' = \frac{d}{d\xi}$$

- ▶ **fronte d'onda** - φ monotona, $I = \mathbb{R}$ e φ che collega due stati stazionari di (E)
- ▶ **semifronte (stretto)** - φ monotono (non costante), $I = (-\infty, \varpi)$ o $I = (\varpi, \infty)$ e non si può estendere a tutto \mathbb{R}
- ▶ **(profilo) classico** - φ è differenziabile e $D(\varphi)\varphi'$ è assolutamente continuo $\implies (D(\varphi)\varphi')' + (c\varphi - f(\varphi))' + g(\varphi) = 0$ q.o. in I
- ▶ **(profilo) sharp in ℓ** - esiste $\xi_\ell \in I$, $\varphi(\xi_\ell) = \ell$, φ è classica in $I \setminus \{\xi_\ell\}$ e non differenziabile in ξ_ℓ



esempio di profilo sharp

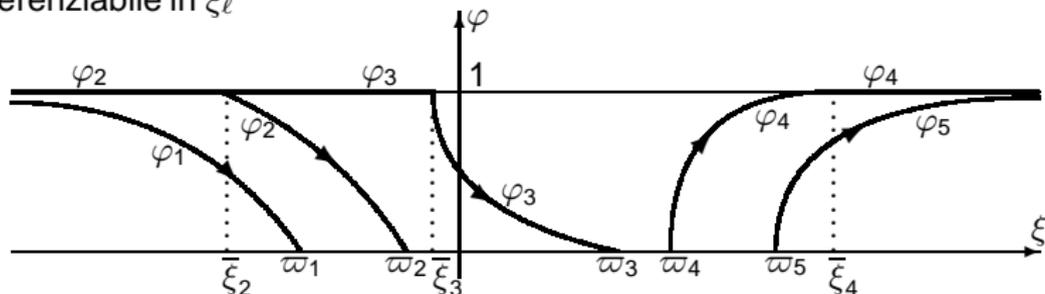


Soluzioni con profilo costante

Equazione del profilo

$$(D(\varphi)\varphi')' + (c\varphi - f(\varphi))' + g(\varphi) = 0, \quad \xi \in I \subseteq \mathbb{R}, \quad ' = \frac{d}{d\xi}$$

- ▶ **fronte d'onda** - φ monotona, $I = \mathbb{R}$ e φ che collega due stati stazionari di (E)
- ▶ **semifronte (stretto)** - φ monotono (non costante), $I = (-\infty, \varpi)$ o $I = (\varpi, \infty)$ e non si può estendere a tutto \mathbb{R}
- ▶ **(profilo) classico** - φ è differenziabile e $D(\varphi)\varphi'$ è assolutamente continuo $\implies (D(\varphi)\varphi')' + (c\varphi - f(\varphi))' + g(\varphi) = 0$ q.o. in I
- ▶ **(profilo) sharp in l** - esiste $\xi_l \in I$, $\varphi(\xi_l) = l$, φ è classica in $I \setminus \{\xi_l\}$ e non differenziabile in ξ_l



φ_1 : semi-fronte decrescente in senso stretto; φ_5 : semi-fronte crescente in senso stretto; φ_2, φ_3 : semifronti sharp; φ_4 : semifronte classico non strettamente crescente

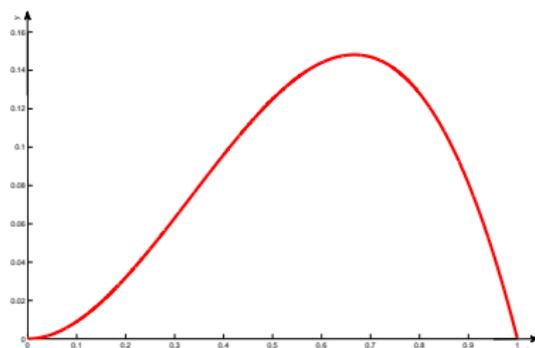
Soluzioni con profilo costante - diffusione biologica

$$(E) \quad \rho_t + f(\rho)_x = (D(\rho)\rho_x)_x + g(\rho), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \rho \in [0, 1]$$

- ▶ $D(\rho) > 0, \rho \in (0, 1)$
- ▶ $D(\rho) > 0, \rho \in (0, \alpha) \quad D(\rho) < 0, \rho \in (\alpha, 1), \quad \alpha \in (0, 1)$
 - diffusione biologica
 - epidemiologia
- ★ $g(0) = g(1) = 0, g(\rho) > 0, \rho \in (0, 1)$

Osservazione $\rho \equiv 0$ e $\rho \equiv 1$ sono stati stazionari di (E)

- [M.-Marcelli-Matucci, 2002-2011]



Soluzioni con profilo costante - diffusione biologica

$$(E) \quad \rho_t + f(\rho)_x = (D(\rho)\rho_x)_x + g(\rho), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \rho \in [0, 1]$$

- ▶ $D(\rho) > 0, \rho \in (0, 1)$
- ▶ $D(\rho) > 0, \rho \in (0, \alpha) \quad D(\rho) < 0, \rho \in (\alpha, 1), \quad \alpha \in (0, 1)$
- ★ $g(0) = g(1) = 0, g(\rho) > 0, \rho \in (0, 1)$
 - diffusione biologica
 - epidemiologia

Osservazione $\rho \equiv 0$ e $\rho \equiv 1$ sono stati stazionari di (E)

• [M.-Marcelli-Matucci, 2002-2011]

- (1) esistenza ed unicità (a meno di shift) di soluzioni del tipo fronte
 $\varphi(-\infty) = 0, \varphi(\infty) = 1$ con velocità $c \geq c^*, c^* \in \mathbb{R}$
- (2) studio della natura classica o sharp dei relativi profili φ
- (3) stima della minima velocità ammissibile c^*
- (4) dipendenza continua dai parametri delle velocità e dei profili

• [Gilding-Kersner, 2005]

Soluzioni con profilo costante - pedoni in un corridoio con ingressi

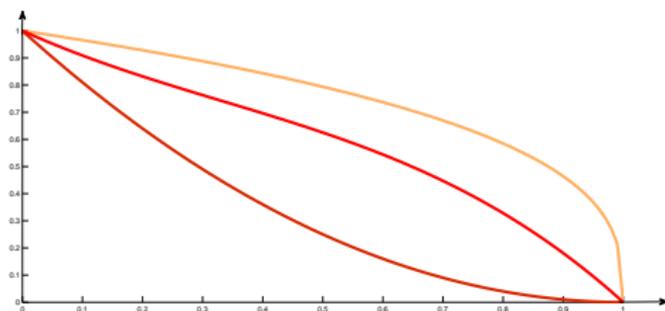
$$(E) \quad \rho_t + f(\rho)_x = (D(\rho)\rho_x)_x + g(\rho), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \rho \in [0, 1]$$

▶ $D(\rho) > 0, \rho \in (0, 1)$

★ $g(1) = 0, g(\rho) > 0, \rho \in [0, 1)$ • pedoni

• [Corli-M., 2016] • [Corli- di Ruvo-M., 2017]

Osservazione $\rho \equiv 1$ **unico** stato stazionario di (E)



Soluzioni con profilo costante - pedoni in un corridoio con ingressi

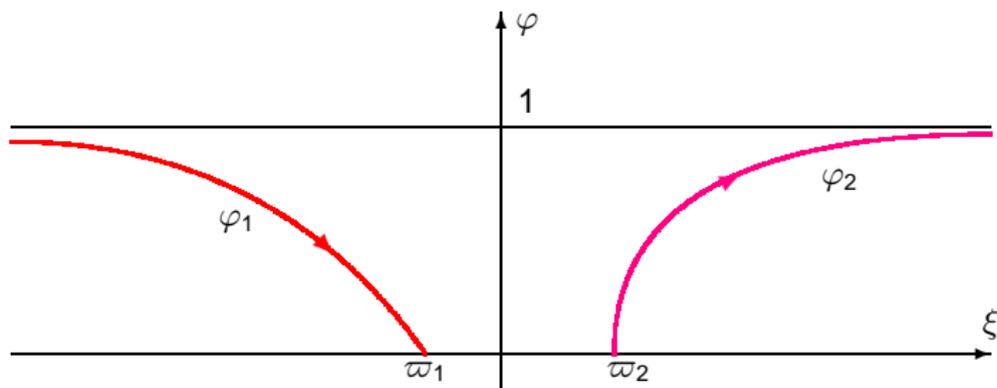
$$(E) \quad \rho_t + f(\rho)_x = (D(\rho)\rho_x)_x + g(\rho), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \rho \in [0, 1]$$

▶ $D(\rho) > 0, \rho \in (0, 1)$

★ $g(1) = 0, g(\rho) > 0, \rho \in [0, 1)$ • pedoni

• [Corli-M., 2016] • [Corli-di Ruvo-M., 2017]

★ esistenza di semi-fronti da 1 e per 1 per ogni $c \in \mathbb{R}$



Soluzioni con profilo costante - pedoni in un corridoio con ingressi

$$(E) \quad \rho_t + f(\rho)_x = (D(\rho)\rho_x)_x + g(\rho), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \rho \in [0, 1]$$

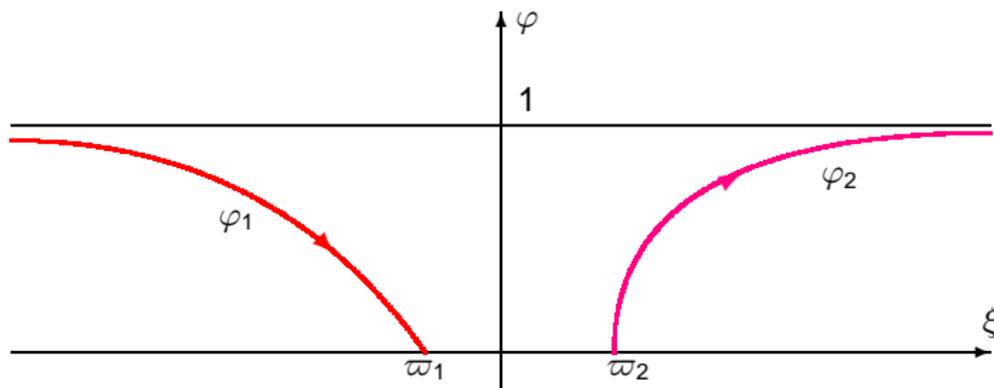
▶ $D(\rho) > 0, \rho \in (0, 1)$

★ $g(1) = 0, g(\rho) > 0, \rho \in [0, 1)$ • pedoni

• [Corli-M., 2016] • [Corli-di Ruvo-M., 2017]

★ esistenza di semi-fronti da 1 e per 1 per ogni $c \in \mathbb{R}$

★ pendenza del profilo φ quando raggiunge il valore 0



Soluzioni con profilo costante - pedoni in un corridoio con ingressi

$$(E) \quad \rho_t + f(\rho)_x = (D(\rho)\rho_x)_x + g(\rho), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \rho \in [0, 1]$$

► $D(\rho) > 0, \rho \in (0, 1)$

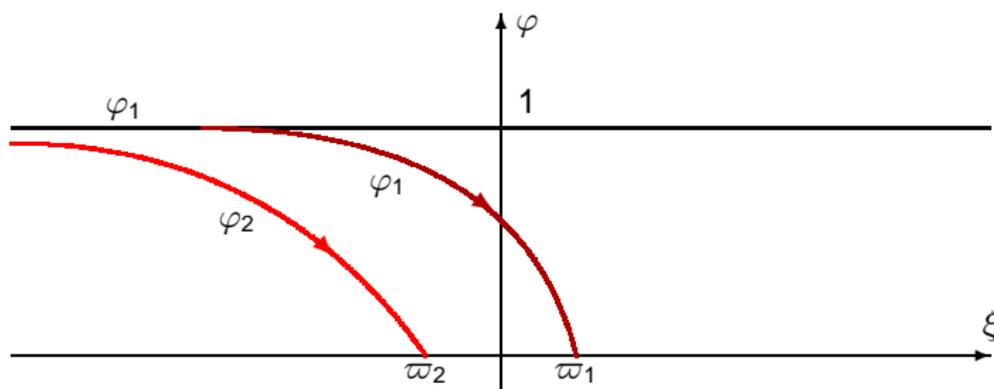
★ $g(1) = 0, g(\rho) > 0, \rho \in [0, 1)$ • pedoni

• [Corli-M., 2016] • [Corli- di Ruvo-M., 2017]

★ **esistenza di semi-fronti da 1 e per 1** per ogni $c \in \mathbb{R}$

★ pendenza del profilo φ quando raggiunge il valore 0

★ monotonia stretta del profilo φ



Il semifronte φ_2 è monotono in senso stretto, mentre φ_1 non lo è

Soluzioni con profilo costante - pedoni in un corridoio con ingressi

$$(E) \quad \rho_t + f(\rho)_x = (D(\rho)\rho_x)_x + g(\rho), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \rho \in [0, 1]$$

▶ $D(\rho) > 0, \rho \in (0, 1)$

★ $g(1) = 0, g(\rho) > 0, \rho \in [0, 1)$ • pedoni

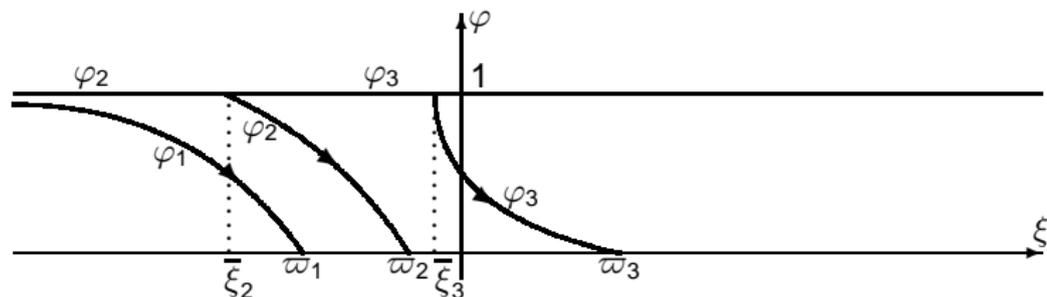
• [Corli-M., 2016] • [Corli-di Ruvo-M., 2017]

★ esistenza di semi-fronti **da 1** e **per 1** per ogni $c \in \mathbb{R}$

★ pendenza del profilo φ quando raggiunge il valore 0

★ monotonia stretta del profilo φ

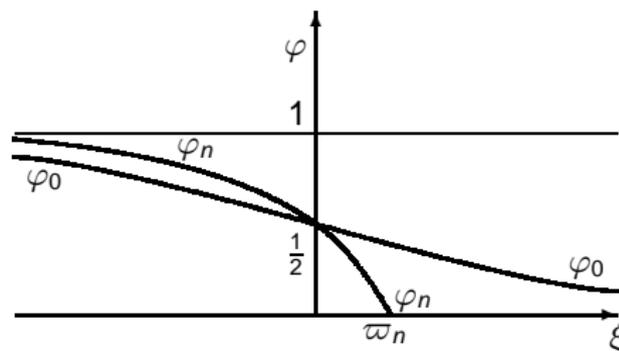
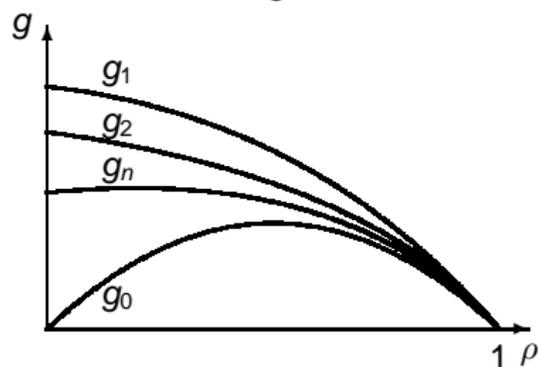
★ quando il profilo φ è classico o sharp



Soluzioni con profilo costante - pedoni in un corridoio con ingressi

$$(E) \quad \rho_t + f(\rho)_x = (D(\rho)\rho_x)_x + g(\rho), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \rho \in [0, 1]$$

- ▶ $D(\rho) > 0, \rho \in (0, 1)$
- ★ $g(1) = 0, g(\rho) > 0, \rho \in [0, 1)$ • pedoni
- [Corli-M., 2016] • [Corli-di Ruvo-M., 2017]
 - ★ **esistenza di semi-fronti da 1 e per 1** per ogni $c \in \mathbb{R}$
 - ★ pendenza del profilo φ quando raggiunge il valore 0
 - ★ monotonia stretta del profilo φ
 - ★ quando il profilo φ è classico o sharp
 - ★ convergenza di semi-fronti ad un fronte



Soluzioni con profilo costante - risultato classico

$$(E) \quad \rho_t + f(\rho)_x = (D(\rho)\rho_x)_x, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \rho \in [0, 1]$$

► $D(\rho) > 0, \rho \in (0, 1)$

★ $g \equiv 0$

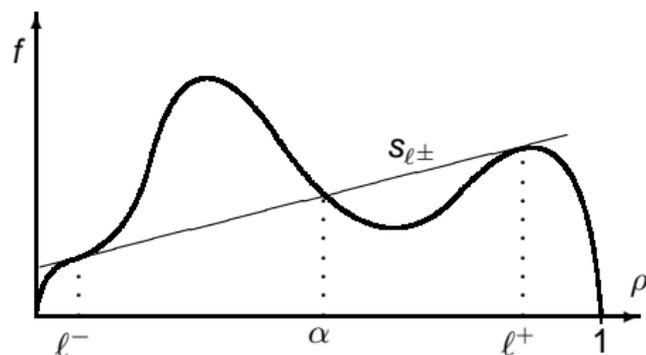
• [Gilding - Kersner, 2004]

Osservazione $\rho \equiv \ell, \ell \in [0, 1]$ **sempre** stato stazionario di (E)

★ esistono fronti con profilo crescenti o decescenti, c fissato

Esempio

- $\varphi_1(-\infty) = \ell^-, \varphi_1(\infty) = \alpha, c = \frac{f(\alpha) - f(\ell^-)}{\alpha - \ell^-}$
- $\varphi_2(-\infty) = \alpha, \varphi_2(\infty) = \ell^+, c = \frac{f(\ell^+) - f(\alpha)}{\ell^+ - \alpha}$



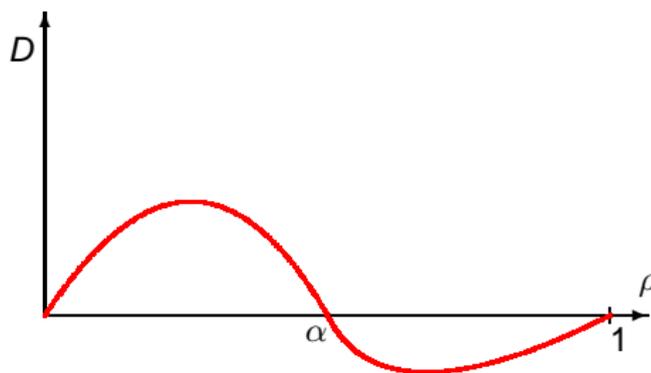
Soluzioni con profilo costante - diffusività che cambia segno

$$(E) \quad \rho_t + f(\rho)_x = (D(\rho)\rho_x)_x, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \rho \in [0, 1]$$

► $D(\rho) > 0, \rho \in (0, \alpha)$ $D(\rho) < 0, \rho \in (\alpha, 1), \quad \alpha \in (0, 1)$

★ $g \equiv 0$ • dinamica delle folle
 • traffico veicolare

• [Corli-M., 2018]



Osservazione: non richiediamo, necessariamente, $D(0) = D(1) = 0$

Siamo interessati alla ricerca di fronti che collegano $l^- \in [0, \alpha)$ con $l^+ \in (\alpha, 1]$

$$\varphi(-\infty) = l^-, \quad \varphi(l^+) = \infty$$

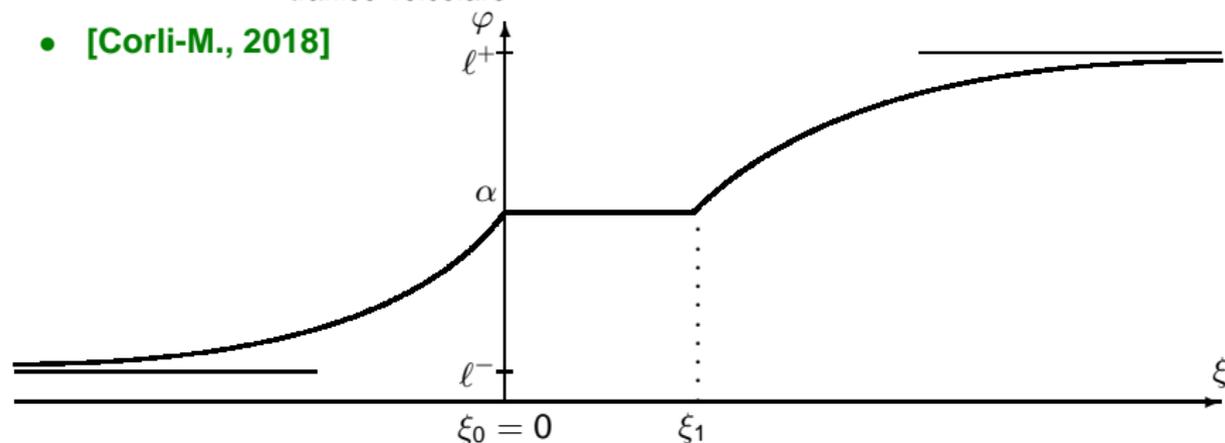
Soluzioni con profilo costante - diffusività che cambia segno

$$(E) \quad \rho_t + f(\rho)_x = (D(\rho)\rho_x)_x, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \rho \in [0, 1]$$

▶ $D(\rho) > 0, \rho \in (0, \alpha)$ $D(\rho) < 0, \rho \in (\alpha, 1), \quad \alpha \in (0, 1)$

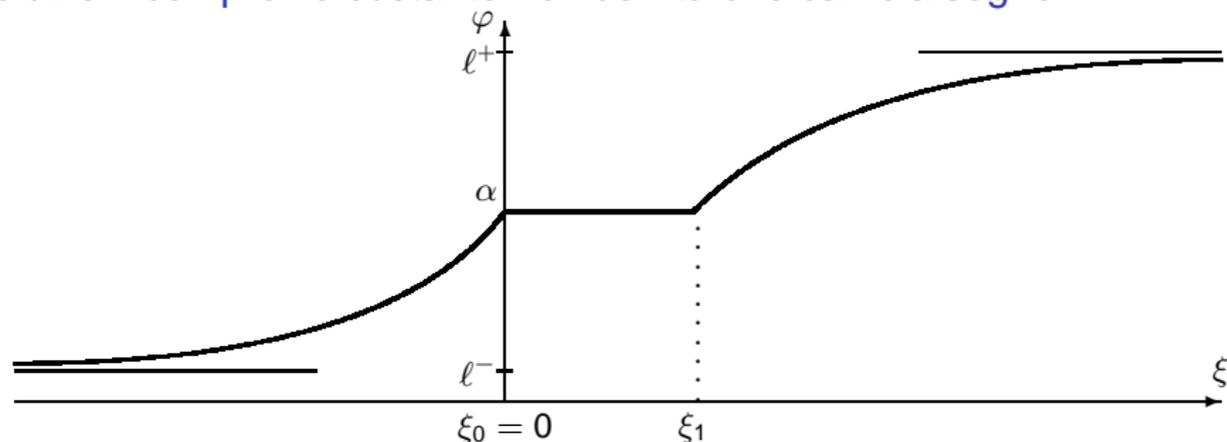
★ $g \equiv 0$ • dinamica delle folle
 • traffico veicolare

• [Corli-M., 2018]



Esempio di profilo di un fronte che collega l^- con l^+ . Si osservi la presenza di un **tratto costante** di valore α

Soluzioni con profilo costante - diffusività che cambia segno



- diffusività positive: profili determinati a meno di **shift**
- diffusività che cambia segno: **maggiore** perdita di unicità

I profili sono monotoni \implies esistono, unici, ξ_0, ξ_1 , per semplicità $\xi_0 = 0$, con $\varphi < \alpha$ in $(-\infty, 0)$ e $\varphi > \alpha$ in (ξ_1, ∞) .

Lemma Se esiste un profilo φ tra l^- ed l^+ , allora esiste un profilo tra l^- ed l^+ con $\xi_1 > 0$ arbitrario.

$$\xi_0 = \xi_1 = 0$$

Soluzioni con profilo costante - diffusività che cambia segno

$$(E) \quad \rho_t + f(\rho)_x = (D(\rho)\rho_x)_x, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \rho \in [0, 1]$$

$$\blacktriangleright D(\rho) > 0, \rho \in (0, \alpha) \quad D(\rho) < 0, \rho \in (\alpha, 1), \quad \alpha \in (0, 1)$$

- ★ $g \equiv 0$
- dinamica delle folle
 - traffico veicolare

• [Corli-M., 2018]

Teorema (esistenza) Esiste $\varphi(\pm\infty) = \ell^\pm$ **sse**

$$(a) \quad \frac{f(\alpha) - f(\ell^-)}{\alpha - \ell^-} = \frac{f(\ell^+) - f(\alpha)}{\ell^+ - \alpha} =: c_{\ell^\pm}$$

$$(b) \quad \begin{cases} f(\rho) > s_{\ell^\pm} & \rho \in (\ell^-, \alpha) \\ f(\rho) < s_{\ell^\pm} & \rho \in (\alpha, \ell^+) \end{cases}$$

$$(c) \quad \int_{\alpha-\nu}^{\alpha+\nu} \frac{D(\rho)}{f(\rho) - s_{\ell^\pm(\rho)}} d\rho < \infty, \quad \nu > 0$$

$$s_{\ell^\pm(\rho)} = \frac{f(\alpha) - f(\ell^\pm)}{\alpha - \ell^\pm}(\rho - \alpha) + f(\alpha)$$

La velocità di φ è $c = c_{\ell^\pm}$

Soluzioni con profilo costante - diffusività che cambia segno

$$(E) \quad \rho_t + f(\rho)_x = (D(\rho)\rho_x)_x, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \rho \in [0, 1]$$

$$\blacktriangleright D(\rho) > 0, \rho \in (0, \alpha) \quad D(\rho) < 0, \rho \in (\alpha, 1), \quad \alpha \in (0, 1)$$

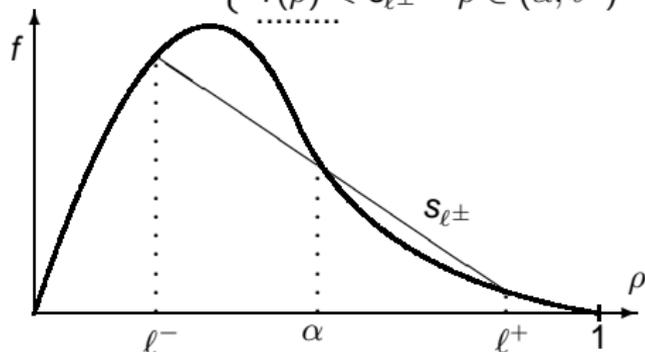
- ★ $g \equiv 0$
- dinamica delle folle
- traffico veicolare

• [Corli-M., 2018]

Teorema (esistenza) Esiste $\varphi(\pm\infty) = l^\pm$ **sse**

$$(a) \quad \frac{f(\alpha) - f(l^-)}{\alpha - l^-} = \frac{f(l^+) - f(\alpha)}{l^+ - \alpha} =: c_{l^\pm}$$

$$(b) \quad \begin{cases} f(\rho) > s_{l^\pm} & \rho \in (l^-, \alpha) \\ f(\rho) < s_{l^\pm} & \rho \in (\alpha, l^+) \end{cases}$$



Soluzioni con profilo costante - diffusività che cambia segno

$$(E) \quad \rho_t + f(\rho)_x = (D(\rho)\rho_x)_x, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \rho \in [0, 1]$$

$$\blacktriangleright D(\rho) > 0, \rho \in (0, \alpha) \quad D(\rho) < 0, \rho \in (\alpha, 1), \quad \alpha \in (0, 1)$$

- ★ $g \equiv 0$
- dinamica delle folle
- traffico veicolare

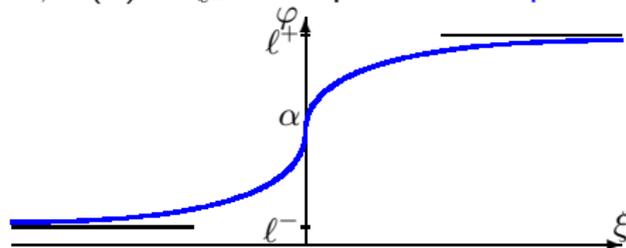
• [Corli-M., 2018]

Teorema (monotonia, natura sharp e unicità del profilo)

- ▶ φ è unico ($\xi_0 = \xi_1 = 0$), $\varphi'(\xi) > 0$, $l^- < \varphi(\xi) < l^+$, $\varphi(\xi) \neq \alpha$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \varphi'(\xi) = \begin{cases} \frac{f'(\alpha) - c_{\ell^\pm}}{D'(\alpha)} & \text{se } D'(\alpha) < 0, \\ \infty & \text{se } D'(\alpha) = 0 \text{ and } f'(\alpha) - c_{\ell^\pm} < 0. \end{cases}$$

- ▶ $D'(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) - c_{\ell^\pm} < 0$ il profilo è **sharp in α** .



- $D'(\alpha) = f'(\alpha) - c_{\ell^\pm} = 0$: analisi più complicata

Soluzioni con profilo costante - diffusività che cambia segno

$$(E) \quad \rho_t + f(\rho)_x = (D(\rho)\rho_x)_x, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \rho \in [0, 1]$$

▶ $D(\rho) > 0, \rho \in (0, \alpha) \quad D(\rho) < 0, \rho \in (\alpha, 1), \quad \alpha \in (0, 1)$

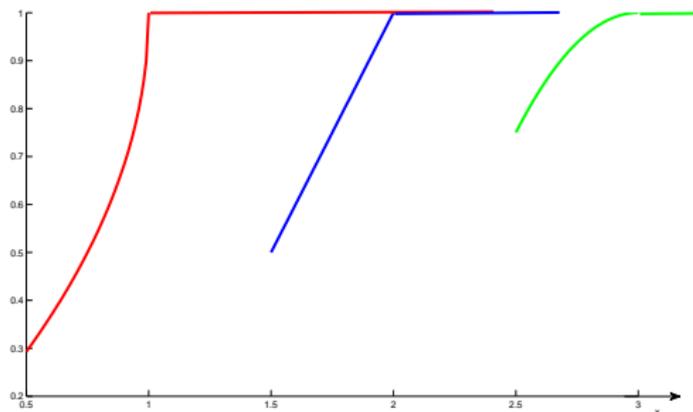
★ $g \equiv 0$

- dinamica delle folle
- traffico veicolare

• [Corli-M., 2018]

Teorema (monotonia, natura sharp e unicità del profilo)

▶ Il profilo $\varphi \equiv \ell^+$ per $\xi \geq \bar{\xi} \in \mathbb{R}$



Soluzioni con profilo costante - diffusività che cambia segno

$$(E) \quad \rho_t + f(\rho)_x = (D(\rho)\rho_x)_x, \quad t \geq 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}, \rho \in [0, 1]$$

$$\blacktriangleright D(\rho) > 0, \rho \in (0, \alpha) \quad D(\rho) < 0, \rho \in (\alpha, 1), \quad \alpha \in (0, 1)$$

- ★ $g \equiv 0$
- dinamica delle folle
- traffico veicolare

- [Corli-M., 2018]

Teorema (monotonia, natura sharp e unicità del profilo)

- ▶ Il profilo $\varphi \equiv \ell^+$ per $\xi \geq \bar{\xi} \in \mathbb{R}$
sse $\ell^+ = 1$ e

$$\int_a^1 \frac{D(\rho)}{f(\rho) - s_{\ell^+}(\rho)} d\rho < \infty, \quad a \in (\alpha, 1).$$

$s_{\ell^+}(\rho)$: retta per $(\alpha, f(\alpha)), (1, f(1))$.

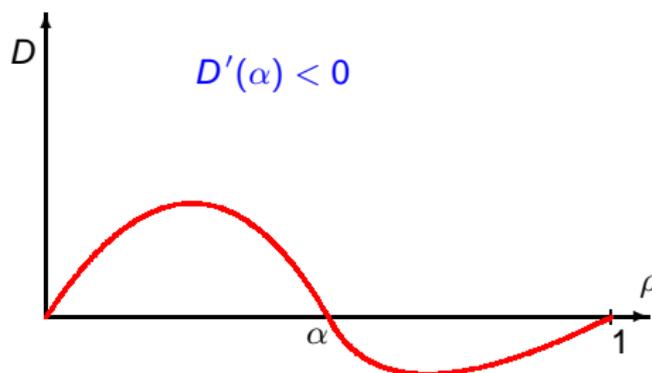
Un risultato analogo vale per ℓ^-

Limite viscoso dei profili

$$(E) \quad \rho_t + f(\rho)_x = (\epsilon D(\rho)\rho_x)_x, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \rho \in [0, 1], \epsilon > 0$$

► $D(\rho) > 0, \rho \in (0, \alpha)$ $D(\rho) < 0, \rho \in (\alpha, 1),$ $\alpha \in (0, 1)$

★ $g \equiv 0$



Cosa accade a φ_ϵ quando $\epsilon \rightarrow 0^+$?

Convergenza di ρ_ϵ a ρ soluzione di $\rho_t + f(\rho)_x = 0$

- $D > 0$
- [Volpert-Hudajev, 1969]
 - [Coclite - Corli - di Ruvo, 2017]

Limite viscoso dei profili

$$(E) \quad \rho_t + f(\rho)_x = (\epsilon D(\rho)\rho_x)_x, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \rho \in [0, 1], \epsilon > 0$$

$$\blacktriangleright D(\rho) > 0, \rho \in (0, \alpha) \quad D(\rho) < 0, \rho \in (\alpha, 1), \quad \alpha \in (0, 1)$$

$$\star g \equiv 0$$

$$D'(\alpha) < 0$$

Cosa accade a φ_ϵ quando $\epsilon \rightarrow 0^+$?

Convergenza di ρ_ϵ a ρ soluzione di $\rho_t + f(\rho)_x = 0$

- $D > 0$
- [Volpert-Hudajev, 1969]
 - [Coclite - Corli - di Ruvo, 2017]

Nessun risultato quando D cambia segno

Limite viscoso dei profili

$$(E) \quad \rho_t + f(\rho)_x = (\epsilon D(\rho)\rho_x)_x, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \rho \in [0, 1], \epsilon > 0$$

▶ $D(\rho) > 0, \rho \in (0, \alpha)$ $D(\rho) < 0, \rho \in (\alpha, 1),$ $\alpha \in (0, 1)$

★ $g \equiv 0$

$$D'(\alpha) < 0$$

• [Corli-M., 2018]

Teorema (convergenza dei fronti verso soluzioni della legge di conservazione)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \varphi_\epsilon(\xi) =: \varphi_0(\xi) = \begin{cases} \ell^- & \text{se } \xi < 0, \\ \ell^+ & \text{se } \xi > 0. \end{cases}$$

La convergenza è uniforme negli intervalli $(-\infty, -\delta)$ e $(\delta, +\infty)$ con $\delta > 0$

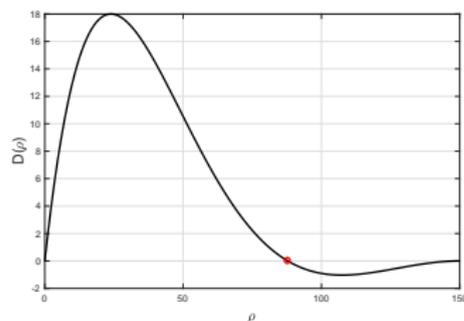
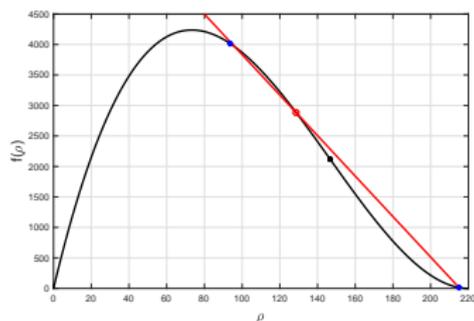
Un modello di traffico veicolare

$$\rho_t + (\rho v(\rho))_x = (D(\rho)\rho_x)_x, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \rho \in [0, 1]$$

$$v(\rho) = \bar{v}(1 - \rho)^2, \quad D(\rho) = -\rho v'(\rho) (h v^2(\rho) + \tau \rho v'(\rho))$$

$h v^2(\rho)$, $h > 0$: distanza di anticipazione $\tau > 0$: tempo di reazione

Lemma Per ogni scelta di \bar{v} , h , τ positivi ed $\alpha = \alpha(v, h, \tau)$ opportuno, la diffusività D cambia segno. Se v, h, τ sono tali che $\alpha(v, h, \tau) \in (\frac{1}{2}, 1)$, allora ci sono infinite coppie (ℓ^-, ℓ^+) che verificano le condizioni del teorema di esistenza.



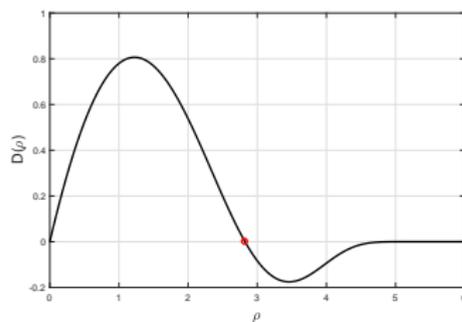
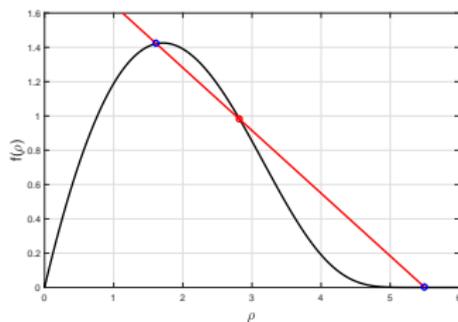
$\bar{v} = 150$ auto/km, $\bar{v} = 130$ km/h, $\tau = 2$ s, $h = 1/15800$; allora $\delta := h v^2$ è a distanza richiesta per arrestarsi dalla velocità v ad una decelerazione di circa 0.1g.

Un modello di dinamica dei pedoni

$$\rho_t + (\rho v(\rho))_x = (D(\rho)\rho_x)_x, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \rho \in [0, 1]$$

$$v(\rho) = \bar{\rho} e^{\gamma \frac{\bar{\rho} - \rho}{1 - \rho}}, \quad D(\rho) = -\rho v'(\rho) (h v(\rho) + \tau \rho v'(\rho))$$

Risultati analoghi. Con dati reali le condizioni su f sono soddisfatte per τ sufficientemente piccolo.



$$\bar{\rho} = 6 \text{ pedoni/m}, \bar{v} = 1.7 \text{ m/s}, \tau = 0.5 \text{ s}, h = 1.5, \gamma = 1.788.$$

Dati da **[Venuti-Bruno, 2007]**

A. Corli - L. Malaguti, *Viscous profiles in models of collective movements with negative diffusivities* (2018), sottomesso, arXiv.

A. Corli - L. di Ruvo - L. Malaguti, *Sharp profiles in models of collective movements*. Nonlinear Differential Equations and Applications (NoDEA). Vol 24(4) 40 (2017).

A. Corli - L. Malaguti, *Semi-wavefront solutions in models of collective movements with density-dependent diffusivity*, Dynamics of PDE, Vol.13, No.4, 297-331, (2016).

Grazie per l'attenzione