Metodo delle funzioni di Lyapunov per problemi differenziali

Irene Benedetti

Dipartimento di Matematica e Informatica,
Università di Perugia

Giornate di Equazioni Differenziali Ordinarie: metodi e prospettive,
Ancona, 27-29 settembre 2018

Problema al bordo finito dimensionale

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in (a, b) \\ g\big(x(a), x(b)\big) = 0 \end{cases}$$

- $f \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mappa continua
- $g \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mappa continua

Soluzioni classiche

funzioni $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 tali che $g(x(a), x(b)) = 0$ e che soddisfano l'equazione in (P) per ogni $t \in (a, b)$.

Linearizzazione

Consideriamo il problema linearizzato

$$(P_\ell)\begin{cases} x'(t) = \lambda f(t, y(t)), & t \in (a, b) \\ g\big(x(a), x(b)\big) = 0 \end{cases}$$

- $\lambda \in [0, 1]$
- $y \in C\big([a, b]; \mathbb{R}^n\big)$ è una funzione data

Supponiamo che

- per ogni $y(\cdot)$ il problema (P_ℓ) abbia una soluzione unica $T(y, \lambda)$
- la mappa soluzione $T\colon\ C\big([a, b]; \mathbb{R}^n\big) \times [0, 1] \to C\big([a, b]; \mathbb{R}^n\big)$ sia continua e compatta

Notare che: i punti fissi della mappa $T(\cdot, 1)$ sono soluzioni del problema (P).

Linearizzazione

Se esistesse un insieme aperto e limitato $\Omega \subset C\big([a,b];\mathbb{R}^n\big)$ tale che:

(a) $\deg\big(i - T(\cdot,0),\overline{\Omega}\big) \neq 0$

(b) $x \neq T(x,\lambda)$ for all $(x,\lambda) \in \partial\Omega \times (0,1)$

allora il problema (P) ammetterebbe una soluzione $x \in \overline{\Omega}$.

Per ottenere (a)
Si considera un insieme convesso K che contiene lo 0.
Poi si modifica (P_ℓ) in modo che 0 sia l'unico punto fisso di $T(\cdot,0)$ ottenendo $\deg\big(i - T(\cdot,0),\overline{\Omega}\big) = 1$.

Con la funzione bounding si ottiene (b)

Funzione bounding

Definizione

Una funzione di classe C^1, $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, é detta funzione bounding per l'equazione in (P) se

- *l'insieme $K = \{x \in \mathbb{R}^n \colon V(x) < 0\}$ è limitato e $V_{|\partial K} = 0$*
- *condizione di trasversalità*
  $\langle DV(x), f(t,x)\rangle \neq 0$ per ogni $t \in (a,b)$ e $x \in \partial K$

risultato

Se esiste una funzione bounding per l'equazione in (P) e se esiste un punto fisso x di $T(\cdot, \lambda)$, $\lambda \in (0,1)$, tale che $x(a) \in K$ e $x(b) \in K$, allora $x(t) \in K$ per ogni $t \in [a,b]$.

Quindi l'insieme Ω puó essere considerato come l'insieme delle funzioni continue $x\colon [a,b] \to K$.

Supponiamo per assurdo che esistano

- $t_0 \in (a, b)$
- una soluzione classica $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ tale che
  - $x(t) \in \overline{K}, \forall t \in (a, b)$
  - $x(t_0) \in \partial K$

la funzione $u : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $u(t) = V(x(t))$

- è di classe C^1
- ha un massimo in t_0

dunque

$$0 = u'(t_0) = \frac{d}{dt} V(x)\lfloor_{t=t_0} = \langle DV(x(t_0)), x'(t_0)\rangle = \langle DV(x(t_0)), f(t_0, x(t_0))\rangle \neq 0$$

- $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mappa Carathéodory

Soluzioni forti

funzioni assolutamente continue $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ tali che verificano l'equazione in (P) per q.o $t \in (a,b)$ e $g(x(a), x(b)) = 0$.

condizione di trasversalità
$\big\langle DV(x), f(t,x)\big\rangle \leq 0$ per ogni $t \in (a,b)$ e $x \in B^{\varepsilon}_{\partial K} \bigcap \overline{K}$

Supponiamo per assurdo che esistano

- $t_0 \in (a,b)$
- una soluzione forte $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ tale che
  - $x(t) \in \overline{K}, \forall t \in (a,b)$
  - $x(t_0) \in \partial K$

allora esiste $\bar{t} \in [a, t_0)$ tale che $x(t) \in B^{\varepsilon}_{\partial K} \bigcap K$ per ogni $t \in [\bar{t}, t_0)$, dunque

$$\underbrace{V(x(t_0)) - V(x(\bar{t}))}_{>0} = \int_{\bar{t}}^{t_0} \frac{d}{ds} V(x(s))\,ds \quad = \quad \int_{\bar{t}}^{t_0} \langle DV(x(s), x'(s)\rangle\,ds$$

$$= \quad \underbrace{\int_{\bar{t}}^{t_0} \langle DV(x(s)), f(s, x(s))\rangle\,ds}_{\leq 0}$$

Funzione bounding

introdotta da Gaines-Mawhin (1977) si estende in varie direzioni

- generalizzazione al caso infinito dimensionale
  - Loi-Kornev-Obukhovskii-Zecca (2010-2012) - spazi di Hilbert
  - Andres-Malaguti-Taddei (2009) - spazi di Banach
  - B.-Malaguti-Taddei (2010) - spazi di Banach dotati della topologia debole
- localizzazione delle condizioni di trasversalità su ∂K nel caso Carathéodory
  - Mawhin-Thompson (2003) - equazioni differenziali $\mathbb{R}^n$
  - Andres-Malaguti-Taddei (2007) - inclusioni differenziali $\mathbb{R}^n$
  - B.-Panasenko-Taddei (2007) - inclusioni differenziali in spazi di Hilbert
  - Cecchini-Malaguti-Taddei (2011) - inclusioni differenziali in spazi di Banach

Funzione di Lyapunov

$$(P_c)\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in (a, b) \\ x(a) = \xi \end{cases}$$

Definizione

Una funzione $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *è detta funzione di Lyapunov se per ogni* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *e ogni soluzione di* (P_c) *si ha*

$$V(x(t)) \leq V(\xi), \quad \textit{per ogni } t \in [a, b].$$

è una funzione che decresce lungo le soluzioni di (P_c).

Funzione di Lyapunov

Se $V \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e (P_c) ha una soluzione classica $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\langle DV(x(t)), f(t, x)\rangle \leq 0, \quad \text{per ogni } t \in [a, b] \text{ e } x \in \mathbb{R}^n}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{V \text{ è una funzione di Lyapunov}}$$

$$\frac{dV}{dt}(x(t)) = \langle DV(x(t)), x'(t)\rangle = \langle DV(x(t)), f(t, x(t))\rangle \leq 0, \quad \text{per ogni } t \in (a, b)$$

quindi la funzione V decresce lungo la soluzione x.

Applicazioni

- esistenza di un bound set
- viabilità: esistenza di soluzioni che rimangono in un dato insieme avendo lo stato iniziale in quell'insieme
- trovare soluzioni per problemi con condizioni iniziali non locali
- problemi di biforcazione
- possibilità di considerare crescite superlineari del termine nonlineare
- stabilità: studio del comportamento delle soluzioni per $t \to \infty$

Problema semilineare in spazi di Banach

Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach

$$(P_{SL}) \begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), & t \in [a, b] \\ x(a) = g(x) \end{cases}$$

- $A : D(A) \subseteq E \to E$ operatore lineare
- $f : [a, b] \times E \to E$ mappa (multimappa) data
- $g : C([a, b], E) \to E$ operatore (multioperatore) dato
- $V : E \to \mathbb{R}$ funzione di Lyapunov

Problema:

Come scrivere le condizioni di trasversalità in questo caso?

per scrivere $\langle DV(x), Ax + f(t, x)\rangle \leq 0$ per ogni $t \in (a, b)$ e $x \in K$
si deve avere che $x \in D(A)$

Problema semilineare in spazi di Banach

Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach

$$(P_{SL}) \begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), & t \in [a, b] \\ x(a) = g(x) \end{cases}$$

- $A : D(A) \subseteq E \to E$ genera un C^0-semigruppo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$
- $f : [a, b] \times E \to E$, $g : C([a, b], E) \to E$ mappe (multimappe) date

Soluzioni forti:

$x : [a, b] \to E$ assolutamente continua che verifica l'equazione in (P_{SL}) per q.o $t \in [a, b]$ e tale che $x(a) = g(x)$.

Soluzioni mild:

$x : [a, b] \to E$ continua tale che verifica la seguente equazione integrale

$$x(t) = S(t-a)g(x) + \int_a^t S(t-s)f(s, x(s))\, ds, \quad t \in [a, b].$$

I.B., N.V.Loi, V.Taddei, DCDS-A (2017)

E spazio di Banach tale che

- riflessivo
- con una base di Schauder
- E^* sia strettamente convesso

(V) condizione di trasversalità: supponiamo che esistano due costanti $R_0 > r_0 > 0$ tali che

$$\langle J(x), f(t,x) \rangle \leq 0,$$

per quasi ogni $t \in [a,b]$ e per ogni $x \in E$ con $r_0 < \|x\| < R_0$.

funzione bounding $=$ $V : E \to \mathbb{R}$, $V(x) = \|x\| - R$, $x \in E$ con $r_0 < R < R_0$ e $K = B_R(0)$

Notare che: $DV(x) = J(x), x \in E$ con
$J : E \to E^*,\ J(x) = \{x^* \in E^*, \|x^*\| = \|x\|$ and $\langle x, x^* \rangle = \|x\|^2\}$

I.B., N.V.Loi, V.Taddei, DCDS-A (2017)

(A) $A : D(A) \subset E \to E$ genera un C^0-semigruppo di contrazioni $\{S(t)\}_{t\geq 0}$;

(f_1) per ogni $x \in E$ la mappa $f(\cdot, x) : [a, b] \to E$ è misurabile;

(f_2) per quasi ogni $t \in [a, b]$ la funzione $f(t, \cdot) : E \to E$ è continua rispetto alla topologia debole;

(f_3) per ogni insieme limitato $D \subset E$ esiste una funzione $\nu_D \in L^1([a, b]; \mathbb{R}$ tale che

$$\|f(t, x)\| \leq \nu_D(t), \quad \text{per quasi ogni } t \in [a, b] \text{ e per ogni } x \in D;$$

(g) $g : C([a, b]; E) \to E$ è lineare, limitata con $\|g\| \leq 1$.

Teorema (I.B., N.V.Loi, V.Taddei, DCDS-A (2017))

Assumiamo le ipotesi (f_1)-(f_3), (g) e la condizione di trasversalità (V). Allora l'insieme delle soluzioni mild del problema (P_{SL}) a valori in $B_R(0)$ è non vuoto.

I. B., L. Malaguti, V. Taddei, sottomesso

$(E, \|\cdot\|)$ spazio di Banach riflessivo

$K \subset E$ un insieme non vuoto, aperto e limitato

$$\text{funzione di Lyapunov} \quad = \quad \begin{array}{l} V: E \to \mathbb{R} \text{ localmente Lipschitz continua} \\ V(x) = 0, x \in \partial K \\ V(x) \leq 0, x \in K \end{array}$$

(V) condizione di trasversalità:

$$\liminf_{h \to 0^-} \frac{V(x + hf(t,x))}{h} < 0$$

per ogni $t \in (a,b]$ e $x \in \partial K$.

Risultato

Supponiamo che $A : D(A) \subset E \to E$ generi un C^0-semigruppo tale che esista $\delta \in (0, \infty)$ per cui

$$S(\tau)\overline{K} \subseteq \overline{K}, \quad \text{per } \tau \in [0, \delta];$$

$f : [a,b] \times E \to E$ sia continua e che sia soddisfatta (V). Allora se $x : [a,b] \to E$ è una soluzione mild di (P_{SL}) tale che $x(t) \in \overline{K}$ per ogni $t \in [a,b]$ allora $x(t) \in K$ per ogni $t \in (a,b]$.

I. B., L. Malaguti, V. Taddei, sottomesso

- (A) $A : D(A) \subset E \to E$ genera un C^0-semigruppo compatto di contrazioni $\{S(t)\}_{t \geq 0}$;
- (f_1) la mappa $f : [a, b] \times E \to E$ è continua;
- (f_2) per ogni insieme limitato $D \subset E$ esiste una funzione $\nu_D \in L^1([a, b]; \mathbb{R}$ tale che

$$\|f(t, x)\| \leq \nu_D(t), \quad \text{per quasi ogni } t \in [a, b] \text{ e per ogni } x \in D;$$

- (g) $g : C([a, b]; E) \to E$ è continua, limitata ed esiste $R > 0$ tale che $g(C([a, b], B_R(0)) \subseteq B_R(0)$.

Teorema (I.B., L.Malaguti, V.Taddei, sottomesso)

Assumiamo le ipotesi (A), (f_1), (f_2), (g) e la condizione di trasversalità (V). Allora l'insieme delle soluzioni mild del problema (P_{SL}) a valori in $K = B_R(0)$ è non vuoto.

Processo di reazione-diffusione

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \int_D k(\xi, y) u(t, y) dy - bu(t, \xi) + g(t, u(t, \xi)), t \in [0, T], \xi \in D \subset \mathbb{R}^n \\ u(t, x) = 0, \quad t \in [0, T], \xi \in \partial D \\ u(0, \xi) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i u(t_i, \xi) \quad \xi \in D \end{cases}$$

- D è un dominio limitato con frontiera sufficientemente regolare
- $b > 0$ costante data
- $k : D \times D \to \mathbb{R}$, $g : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mappe date
- $t_i \in (0, T]$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., q$

$$E = L^p(\Omega),\ K = B_R(0),\ V(x) = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 - R^2\right), \quad x \in E$$

- V è localmente Lipschiziana e Fréchet differenziabile
- $\langle DV(x), u \rangle = \dfrac{1}{\|x\|^{p-2}} \displaystyle\int_D |x(\xi)|^{p-2}\, x(\xi)\, u(\xi)\, d\xi, \ \ x, u \in E$

per b suff. grande: $\langle DV(x), f(t, x) \rangle \leq 0\ \forall\, t \in [0, T], x \in B_R(0)$.

Caratterizzazioni della funzione di Lyapunov

$V : E \to \mathbb{R}$ s.c.i. è una funzione di Lyapunov se e solo se

- Pazy (1981)
  - E spazio di Banach
  - $A : D(A) \subseteq E \to E$ operatore m-accretivo
  - $f \equiv 0$
  - J_λ =operatore risolvente associato ad A.

  $$\limsup_{\lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda}(V(J_\lambda(x) - V(x)) \leq 0$$

- Kocan-Soravia (2002)
  - E spazio di Hilbert
  - $A : D(A) \subseteq E \to E$ massimale monotono
  - $f : \overline{D(A)} \to H$ Lipschitz continua

  $\langle DV(x), Ax + f(x) \rangle \leq 0$ per ogni $x \in E$
  dove V è intesa come viscosity solution

- Carjia et alt. (2000....) caratterizzazioni in termini di derivata contingente

Caratterizzazioni della funzione di Lyapunov

Definizione

Dato un insieme $K \subseteq E$, $v \in E$ è A-tangente a K in in $x \in K$ se
$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} d(S(h)z + hv; K) = 0, \ \forall t \in [a, b), z \in K$$

$T_K^A(x)$ = insieme degli elementi A-tangenti a K in $x \in K$

Notare che: se $A = 0$ $T_K^A(x) = T_K(x)$ cono tangente di Bouligand-Severi

- Pavel (1977) risultato di viabilità se $f(t, z) \in T_K^A(z)$ per ogni $t \in [a, b), z \in K$
- Bader (2000) risultato di viabilità per soluzioni periodiche di inclusioni differenziali

Notare che: $S(t)K \subseteq K \bigoplus f(t, z) \in T_K(z)$ per ogni $t \in [a, b)$ e $z \in K \Rightarrow f(t, z) \in T_K^A(z)$ per ogni $t \in [a, b)$ e $z \in K$

Caratterizzazioni della funzione di Lyapunov

Definizione

La A-derivata contingente di $V : E \to \mathbb{R}$ in $x \in E$ nella direzione $u \in E$ è definita da

$$\underline{D}^A V(x)(f) = \liminf_{\substack{h \downarrow 0 \\ w \to 0_E}} \frac{1}{h}\left[V\left(S(h)x + h(u+w)\right) - V(x)\right].$$

introdotta da Carja (2000)

$V : E \to \mathbb{R}$ s.c.i. è una funzione di Lyapunov se e solo se

- Carjia-Motreanu (2006): $\underline{D}^A V(x)(f) \leq 0$ per ogni $x \in E$
- Carjia-Motreanu (2009), Carjia-Lazu (2009) - esteso risultato precedente al caso di A nonlineare e m-accretivo
- Carjia (2010) - risultato precedente per inclusioni differenziali autonome

I.B.-T.Cardinali-G.Gabor-P.Rubbioni (SVVA 2018)

$(E, \|\cdot\|)$ spazio di Banach separabile

$$(P^c_{SL}) \begin{cases} x'(t) \in Ax(t) + G(t, x(t)), & t \in (a, b) \\ x(a) = \xi \end{cases}$$

(A) $A : D(A) \subset E \to E$ genera un C^0-semigruppo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$

(G1) $G : [a, b] \times E \to E$ ha valori non vuoti, chiusi e limitati

(G2) per ogni insieme limitato $\Omega \subset [a, b] \times E$ esiste una costante $L_\Omega > 0$ tale che $G(t, x) \subset G(s, y) + L_\Omega \max\{|t - s|, \|x - y\|\} B_1(0), \forall (t, x), (s, y) \in \Omega$

Risultato

Supponiamo (A) e $(G1), (G2)$. Una mappa $V : E \to \mathbb{R}$ semicontinua inferiormente tale che per ogni $(\tau, \xi) \in [a, b] \times E$ e ogni $f \in L^1([a, b]; E)$ con $f(s) \in G(\tau, \xi)$ per q.o $s \in [a, b]$

$$\underline{D}^A V(\xi)(f) \leq 0$$

è una funzione di Lyapunov per l'inclusione (P^c_{SL}).

$(E, \|\cdot\|)$ spazio di Banach separabile.

$$(IP)\begin{cases} x'(t) & \in & Ax(t) + G(t, x(t)), & t \neq \tau_j(x(t)),\, j = 1, \cdots, m \\ x(t^+) & = & x(t) + I_j(x(t)), & t = \tau_j(x(t)),\, j = 1, \cdots, m \\ x(0) & = & x_0 \in E, & \end{cases}$$

- $A : D(A) \subset E \to E$ genera un C^0-semigruppo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$
- $G : [0, a] \times E \multimap E$ multimappa
- $I_j : E \to E$, $j = 1, \cdots, m$
- $\tau_j : E \to \mathbb{R}$ sono mappe date $0 < \tau_j(x) < a$, $\forall\, x \in E$, $j = 1, \cdots, m$

I.B. - T. Cardinali - G. Gabor - P. Rubbioni (SVVA 2018)

(G1) $G : [a, b] \times E \to E$ ha valori non vuoti, convessi e compatti

(G2) per ogni insieme limitato $\Omega \subset [a, b] \times E$ esiste una costante $L_\Omega > 0$ tale che $G(t, x) \subset G(s, y) + L_\Omega \max\{|t - s|, \|x - y\|\} B_1(0)$, $\forall (t, x), (s, y) \in \Omega$

(G3) there exists $\alpha \in L^1_+([0, a])$ such that

$$\|G(t, x)\| \le \alpha(t)(1 + \|x\|), \text{ for a.e. } t \in [0, a] \text{ and every } x \in E;$$

(H1) per ogni $j = 1, \ldots, m$, la mappa $\tau_j : E \to \mathbb{R}$ è una funzione continua; per ogni $x \in E$ vale che

- (H1.1) $0 < \tau_j(x) < \tau_{j+1}(x) < a, \ j = 1, \ldots, m - 1$;
- (H1.2) $\tau_j(x + I_j(x)) \le \tau_j(x) < \tau_{j+1}(x + I_j(x)), \ j = 1, \ldots, m - 1$;
- (H1.3) $\tau_m(x + I_m(x)) \le \tau_m(x)$.

Teorema (I.B.-T.Cardinali-G.Gabor-P.Rubbioni (SVVA 2018))

Sotto le ipotesi precedenti, supponiamo che

(H2) per ogni $j = 1, \ldots, m$, $(\tau, \xi) \in [0, a[\times E$, e $f \in L^1([a, b]; E)$ con $f(s) \in G(\tau, \xi)$ per q.o $s \in [a, b]$ valga

$$\underline{D}^A \tau_j(\xi)(f) \le 0.$$

Allora il problema (IP) ammette almeno una soluzione definita su tutto l' intervallo $[a, b]$.

Grazie per l'attenzione