PROGRAMMA DEL CORSO DI GEOMETRIA
INGEGNERIA CIVILE E AMBIENTALE

Anno Accademico: 2011-2012
Facoltà di Ingegneria – Università Politecnica delle Marche
Docente: DOTT. ALESSANDRO CALAMAI

Spazi vettoriali. Applicazioni lineari. Sistemi lineari.
Campi numerici: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Definizione di spazio vettoriale reale. Esempi di spazi vettoriali: $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$. Lo spazio nullo $\{\underline{0}\}$. Lo spazio vettoriale dei polinomi $\mathbb{R}_d[t]$. Lo spazio vettoriale delle matrici $M_{m,n}(\mathbb{R})$. Lo spazio delle funzioni a valori reali, Definizione di sottospazio vettoriale. Esempi di sottospazi. Combinazioni lineari e sottospazio generato da k vettori: $\text{Span}(v_1, ..., v_k)$. Definizione di dipendenza lineare e di indipendenza lineare. Definizione di base di uno spazio vettoriale. Esempi di basi. Basi canoniche. Coordinate rispetto a una base. Teorema delle coordinate. Insiemi massimali di vettori linearmente indipendenti e loro caratterizzazione come basi. Esistenza delle basi di uno spazio finitamente generato. Teorema del completamento. Corollari del teorema del completamento. Definizione di dimensione di uno spazio vettoriale. Sottospazio somma e intersezione. Teorema di Grassmann. Somma diretta e sottospazi supplementari. Unicità della decomposizione rispetto a due sottospazi supplementari. Esistenza (e non unicità) del supplementare. Richiami su applicazioni iniettive, suriettive e biunivoche. Definizione di applicazione lineare. Esempi: traccia di una matrice quadrata, trasposta di una matrice. Applicazione lineare coordinate. Applicazione lineare associata a una matrice A. Derivata di un polinomio. Teorema dell'applicazione lineare. Definizione di nucleo e immagine di un'applicazione lineare. Nucleo e immagine sono sottospazi. Criterio di iniettività e suriettività per un'applicazione lineare. Definizione di rango di una applicazione lineare T. Generatori di $\operatorname{Im} T$. Rango di una matrice. Teorema della dimensione e suoi corollari. Sistemi lineari: matrice dei coefficienti e matrice completa. Teorema di struttura per i sistemi lineari. Definizione di sottospazio affine e sua dimensione. Teorema di Rouché-Capelli. $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$. Matrici e sistemi a scala. Risoluzione all'indietro. Rango e immagine di una matrice a scala. Metodo di Gauss (algoritmo per ridurre a scala una matrice qualsiasi). Operazioni elementari. Risoluzione di sistemi qualsiasi tramite la riduzione a scala. Studio di sistemi con parametro. Tecniche di calcolo: base di immagine e nucleo. Tecniche di calcolo: trovare una base, completare a una base. Tecniche di calcolo: base di somma e intersezione. Equazioni parametriche e cartesiane di sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$. Tecniche di calcolo: come si passa da equazioni cartesiane a parametriche e viceversa.

Matrici e applicazioni lineari. Cambiamenti di base. Determinanti.
Lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari da V in W. Composizione di applicazioni lineari, definizione di isomorfismo. Caratterizzazione degli isomorfismi. L'isomorfismo coordinate tra V e $\mathbb{R}^n$. L'isomorfismo tra lo spazio delle applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ e lo spazio delle matrici $M_{m,n}(\mathbb{R})$. Definizione del prodotto righe per colonne. Proprietà del prodotto righe per colonne. Definizione di matrice invertibile e proprietà dell'inversa. Caratterizzazione delle matrici invertibili (Teorema delle 10+1 equivalenze). Calcolo dell'inversa di una matrice. Definizione della matrice di cambiamento di base. Calcolo della matrice di cambiamento di base tramite una base ausiliaria. Matrice associata ad una applicazione lineare da V in W rispetto a basi fissate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$. Come cambia la matrice associata ad una applicazione lineare al variare delle basi. Caso degli endomorfismi. Matrici simili. La similitudine è relazione di equivalenza. Il determinante di una matrice di ordine 2. Definizione assiomatica del determinante e teorema di esistenza e unicità *(senza dimostrazione)*. Proprietà del determinante. Effetto delle operazioni elementari (su righe o colonne) sul calcolo del determinante. Sviluppo di Laplace rispetto a una riga o a una colonna. Metodo di Sarrus per matrici di ordine 3. Teorema di Binet *(senza dimostrazione)*. Corollari del teorema di Binet. Teorema di Cramer. Esempio di risoluzione di un sistema di ordine n. Metodo degli orlati per calcolare il rango di una matrice *(senza dimostrazione)*. Esempi: applicazione del teorema degli orlati e del teorema di Cramer ai sistemi $m \times n$. Matrice cofattore. Calcolo della matrice inversa con la matrice cofattore.

Autovalori e autovettori. Prodotti scalari. Teorema spettrale.
Definizione di autovettore, autovalore, spettro, autospazio. Endomorfismi diagonalizzabili. Il polinomio caratteristico di un endomorfismo. Proprietà del polinomio caratteristico. Legame tra radici del polinomio caratteristico e autovalori di T. Endormorfismi triangolabili e criterio necessario per la triangolabilità. Criterio necessario per la diagonalizzabilità. Lineare indipendenza di autovalori relativi ad autovalori distinti. Criterio sufficiente per la diagonalizzabilità. Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. Relazione tra molteplicità algebrica e molteplicità geometrica. Criterio necessario e sufficiente per la diagonalizzabilità di un endomorfismo. Schema per lo studio della diagonalizzabilità. Criteri per la similitudine di matrici. Prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^n$: definizione e proprietà. Definizione di forma bilineare simmetrica (F.B.S. o prodotto scalare generalizzato). Definizione di F.B.S. degenere e non degenere. Definizione di F.B.S. definita positiva (negativa), semidefinita positiva (negativa), indefinita. Relazione tra degenericità e segno di una forma bilineare simmetrica. Matrice associata a una forma bilineare. Come cambia la matrice al variare della base. Matrici congruenti. Proprietà della matrice che rappresenta la forma bilineare. Criterio per lo studio del segno di una F.B.S.. Definizione di spazio vettoriale metrico. Norma. Proprietà della norma. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e disuguaglianza triangolare. Definizione di distanza e angolo. Definizione di vettori ortogonali. Vettori ortogonali sono linearmente indipendenti. Basi ortogonali e ortonormali. Proprietà delle basi ortogonali e ortonormali. Coefficienti di Fourier. Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt *(senza dimostrazione)*. Esempio di applicazione. Esistenza e unicità della base ortonormale costruita con il procedimento di Gram-Schmidt. Definizione di proiezione ortogonale e sue proprietà. Definizione di ortogonale di un sottoinsieme e di supplemento ortogonale di un sottospazio. Relative proprietà. Criterio di Cartesio. Definizione di endomorfismo simmetrico in uno spazio vettoriale metrico. Autovettori relativi ad autovalori distinti di un endomorfismo simmetrico sono ortogonali. Proprietà degli endomorfismi simmetrici. Sottospazi invarianti. Richiami sui numeri complessi. Forma algebrica. Modulo e coniugato. Definizione e proprietà del prodotto hermitiano canonico su $\mathbb{C}^n$. Teorema spettrale *(con dimostrazione)*. Corollari del teorema spettrale. Definizione di matrice ortogonale. Proprietà delle matrici ortogonali. Criterio (necessario e) sufficiente per la congruenza di due matrici simmetriche. Criterio per lo studio del segno di una forma bilineare simmetrica *(con dimostrazione)*.

Geometria affine. Geometria euclidea. Coniche e quadriche.
Geometria affine. Sistema di riferimento e coordinate affini. Equazioni cartesiane e parametriche di rette e piani nello spazio. Stella di rette per un punto. Retta per due punti. Stella di piani per un punto. Fascio di piani per due punti. Piano per tre punti non allineati. Posizioni reciproche di due rette nello spazio. Posizioni reciproche di una retta e un piano nello spazio. Fascio di piani di asse r. Piano per una retta e un punto. Piano per due rette. Posizioni reciproche di due piani nello spazio. Sistemi di riferimento affini. Formula del cambiamento di coordinate affini. Orientazione di un sistema di riferimento. Geometria euclidea. Sistema di riferimento e coordinate cartesiane. Retta orientata, angolo tra due rette. Proiezione ortogonale di un punto su una retta. Piano orientato, angolo tra due piani. Proiezione ortogonale di un punto su un piano. Angolo tra una retta e un piano. Distanza tra due punti. Distanza di un punto da una retta. Distanza di un punto da un piano. Il prodotto vettore. Definizione e proprietà. Formula per la distanza di un punto da una retta. Il prodotto misto. Distanza tra due rette. Richiami sulle coniche. Equazioni cartesiane e parametriche di ellisse, iperbole, parabola. Classificazione metrica e affine delle coniche del piano. Forma canonica metrica e affine. Schema per la riduzione in forma canonica. Introduzione alle quadriche. Equazioni cartesiane delle quadriche non degeneri. Ellissoide, iperboloide (a 1 e 2 falde), paraboloide (ellittico e a sella). Quadriche degeneri: cono, cilindro, piani. Classificazione metrica e affine delle quadriche dello spazio. Forma canonica metrica e affine. Esempi di riduzione in forma canonica. Retta tangente a una conica in un suo punto. Piano tangente a una quadrica in un suo punto.

Testo di riferimento:

- "Geometria analitica con elementi di algebra lineare." – M. Abate, C. de Fabritiis, Ed.McGraw-Hill.