Appunti su coniche e quadriche. [1]

Equazione di una conica di $\mathbb{R}^2$:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Matrice dei coefficienti della conica:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Matrice della parte di secondo grado:

$$A_{33} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Forme canoniche delle coniche:

(1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ellisse reale
(2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ ellisse immaginaria ($\emptyset$)
(3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ iperbole
(4) $x^2 - ay = 0$ parabola
(5) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ coppia di rette incidenti
(6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ coppia di rette complesse incidenti (punto)
(7) $\frac{x^2}{a^2} - 1 = 0$ coppia di rette parallele
(8) $\frac{x^2}{a^2} + 1 = 0$ coppia di rette complesse parallele ($\emptyset$)
(9) $x^2 = 0$ coppia di rette coincidenti

Classificazione delle coniche:

(1) $\det A \neq 0$, $\det A_{33} > 0$, $(\det A) \cdot (\mathrm{tr} A_{33}) < 0$
(2) $\det A \neq 0$, $\det A_{33} > 0$, $(\det A) \cdot (\mathrm{tr} A_{33}) > 0$
(3) $\det A \neq 0$, $\det A_{33} < 0$
(4) $\det A \neq 0$, $\det A_{33} = 0$
(5) $\det A = 0$, $\det A_{33} < 0$
(6) $\det A = 0$, $\det A_{33} > 0$
(7) $\det A = 0$, $\det A_{33} = 0$, $\mathrm{rg} A = 2$, ($\exists$ punti reali)
(8) $\det A = 0$, $\det A_{33} = 0$, $\mathrm{rg} A = 2$, ($\nexists$ punti reali)
(9) $\det A = 0$, $\det A_{33} = 0$, $\mathrm{rg} A = 1$

[1] Corso di Geometria per Ing. Civile e Ambientale, docente Alessandro Calamai

Schema della riduzione in forma canonica di una conica
Consideriamo la conica di equazione:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Primo passo: ROTAZIONE
Per il teorema spettrale possiamo diagonalizzare la matrice A_{33} trovando gli autovalori λ_1 e λ_2 e una base ortonormale di autovettori $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$. Sia $B = (v_1 v_2)$ la matrice di cambiamento di base dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$.

Supponiamo che $\det(B) = 1$. Allora la matrice B rappresenta una rotazione degli assi di un angolo ϑ, cioè

$$\begin{cases} x = (\cos\vartheta)x' - (\mathrm{sen}\vartheta)y' \\ y = (\mathrm{sen}\vartheta)x' + (\cos\vartheta)y' \end{cases}$$

Applicando la rotazione, si ottiene un'equazione della forma:

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2ax' + 2by' + a_{33} = 0.$$

Secondo passo: TRASLAZIONE
Primo caso: entrambi gli autovalori sono diversi da 0. In questo caso se la conica è non degenere si dice *a centro*.

Applichiamo la traslazione:

$$\begin{cases} x' = x'' - \frac{a}{\lambda_1} \\ y' = y'' - \frac{b}{\lambda_2} \end{cases}$$

e otteniamo

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + c = 0.$$

A seconda del valore dei coefficienti si trovano le forme canoniche (1), (2), (3), (5) o (6).
Secondo caso: uno degli autovalori è 0 (supponiamo che sia $\lambda_2 = 0$). Operiamo la traslazione:

$$\begin{cases} x' = x'' - \frac{a}{\lambda_1} \\ y' = y'' \end{cases}$$

Si ottiene l'equazione:

$$\lambda_1(x'')^2 + 2by'' + c = 0.$$

Se $b = 0$ si ottiene una delle forme (7), (8), (9) a seconda del segno di c.
Se $b \neq 0$ operiamo un'altra traslazione:

$$\begin{cases} x'' = x''' \\ y'' = y'' - \frac{c}{2b} \end{cases}$$

e otteniamo

$$\lambda_1(x''')^2 + 2by''' = 0,$$

e quindi la forma canonica della parabola (4).

Equazione di una quadrica di $\mathbb{R}^3$:

$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{14}x+2a_{23}yz+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0.$

Matrice dei coefficienti della quadrica:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Matrice della parte di secondo grado:

$$A_{44}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Forme canoniche delle quadriche:

(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ ellissoide reale
(2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$ ellissoide immaginario ($\emptyset$)
(3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$ iperboloide ellittico (a 2 falde)
(4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$ iperboloide iperbolico (a 1 falda)
(5) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z}{c^2}=0$ paraboloide ellittico (a 1 falda)
(6) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z}{c^2}=0$ paraboloide iperbolico (a sella)
(7) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ cono reale
(8) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ cono complesso (punto)
(9) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ cilindro ellittico
(10) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ cilindro iperbolico
(11) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y}{b^2}=0$ cilindro parabolico
(12) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$ cilindro complesso ($\emptyset$)
(13) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ piani incidenti
(14) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ piani complessi incidenti (punto)
(15) $\frac{x^2}{a^2}-1=0$ piani paralleli
(16) $\frac{x^2}{a^2}+1=0$ piani complessi paralleli ($\emptyset$)
(17) $x^2=0$ piani coincidenti

Classificazione delle quadriche:

(1) $\det A \neq 0$
   (a) $\det A_{44} \neq 0$
      (i) $\det A < 0$
         - autovalori di A_{44} concordi $\longrightarrow$ **ellissoide reale**
         - autovalori di A_{44} discordi $\longrightarrow$ **iperboloide ellittico**

      (ii) $\det A > 0$
         - autovalori di A_{44} concordi $\longrightarrow$ **ellissoide immaginario**
         - autovalori di A_{44} discordi $\longrightarrow$ **iperboloide iperbolico**

   (b) $\det A_{44} = 0$
      (i) $\det A < 0 \longrightarrow$ **paraboloide ellittico**
      (ii) $\det A > 0 \longrightarrow$ **paraboloide iperbolico**

(2) $\mathrm{rg} A = 3$
   (a) $\det A_{44} = 0 \longrightarrow$ **cilindro**
   (b) $\det A_{44} \neq 0 \longrightarrow$ **cono**

(3) $\mathrm{rg} A = 2 \longrightarrow$ **piani distinti**

(4) $\mathrm{rg} A = 1 \longrightarrow$ **piani coincidenti**