Scritto di Geometria – Ing. Civile e Ambientale – A.A. 2011/12 – 06/12/2012

Cognome:______________ Nome:______________ Matricola:__________ Immatricolato nel _______

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su ogni foglio che consegnerai devi scrivere nome e cognome. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio). Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma su fogli protocollo a quadretti. Deve essere ben chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se **più di una** *risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere* **giustificate:** *non basta rispondere "Sì" o "No".*

Poni a uguale all'ultima cifra del tuo numero di matricola: $a =$____

1. Esistono valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che il sottoinsieme $S_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x \cos\alpha - y \sin\alpha = 0 \right\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$?

2. Esistono valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ tali che i vettori $v_1 = e_1 + ae_2 - e_4$, $v_2 = 4e_1 - e_2 + (k+1)e_3 + e_4$, $v_3 = -3e_1 + (a+1)e_2 + 5e_3 - 2e_4$ si possono completare a una base di $\mathbb{R}^4$?

3. Esiste una matrice invertibile 2×2 a coefficienti interi negativi la cui inversa ha almeno un coefficiente irrazionale?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Considera il polinomio

$$P(x) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 6x_1x_3 + 2(a-6)x_2x_3 + 3x_3^2 - 2(a-3)x_1 + 4.$$

(i) Determina per quali $k \in \mathbb{R}$ il punto $(1, k, -2)$ appartiene alla quadrica $\mathcal{Q}_P$ associata a $P(x)$;

(ii) trova la forma canonica affine della quadrica $\mathcal{Q}_P$.

B. Considera l'endomorfismo $T : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ dato da $T(X) = X + X^T + (a+2)\mathrm{tr}(X) \cdot I_2$, dove $\mathrm{tr}(X)$ indica la traccia della matrice X e $I_2 \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ è la matrice identità.

(i) Verifica che T è lineare.

(ii) Trova l'immagine tramite T del sottospazio $V = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \right)$.

(iii) Scrivi la matrice associata a T rispetto ad una base a tua scelta.

(iv) Determina autovalori e autovettori di T.

(v) Stabilisci se T è diagonalizzabile oppure no.

C. Al variare dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$ studia il seguente sistema lineare e, quando possibile, determinane le soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = a - 5, \\ kx_1 + kx_2 + (k-1)x_3 = h, \\ (k^2 - 2k)x_1 + (k^2 - 3k)x_2 + (k^2 - 2k + 3)x_3 = 3. \end{cases}$$
