Scritto di Geometria – Ing. Civile e Ambientale – A.A. 2011/12 – 06/10/2012

Cognome:______________ Nome:______________ Matricola:_________ Immatricolato nel _______

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su ogni foglio che consegnerai devi scrivere nome e cognome. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio). Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma su fogli protocollo a quadretti. Deve essere ben chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se **più di una** *risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere* **giustificate:** *non basta rispondere "Si" o "No".*

Poni a uguale all'ultima cifra del tuo numero di matricola: $a =$_____

1. Esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che la conica di equazione $kx^2 + 2xy + ky^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ è una coppia di rette?

2. Esistono valori di $h \in \mathbb{R}$ tali che il sistema $\begin{cases} x + hy - z = a + 2 \\ hx + y + z = a \end{cases}$ non ammette nessuna soluzione?

3. Esiste un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}^3$ tale che $\dim \operatorname{Im}(T) = 2$ e $\dim \operatorname{Ker}(T) = 1$?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Considera i sottospazi vettoriali U e W di $\mathbb{R}^4$ dati rispettivamente da

$$U = \{x \in \mathbb{R}^4 \ : x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, x_2 - x_4 = 0\}, \quad W = \operatorname{Span}(5e_1 + e_2 + 3e_3 + 5e_4, e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4, 4e_1 - e_2 + e_4)$$

(i) Trova dimensione e basi di U e di W;

(ii) trova base e dimensione dei sottospazi $U + W$ e $U \cap W$;

(iii) stabilisci se esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il vettore $v = (2 - k)e_1 + 5e_2 + ke_3 + 5e_4$ appartiene a U e se esistono valori di k per cui v appartiene a $U \cap W$;

(iv) completa la base di $U \cap W$ trovata al punto (ii) ad una base di W.

B. Dato l'endomorfismo $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che $T_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ ky \\ 3x + 2y + z \end{pmatrix}$

(i) scrivi la matrice associata a T_k, rispetto a una base a tua scelta;

(ii) al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, calcola dimensione e base di $\operatorname{Ker} T_k$ e $\operatorname{Im} T_k$ e stabilisci se T_k è iniettiva, suriettiva, invertibile.

(iii) Trova gli autovalori di T_k e stabilisci per quali valori di k l'endomorfismo T_k è diagonalizzabile;

(iv) per tutti i valori di k trovati al punto precedente trova una base di autovettori.

C. Date le rette di equazioni $r : \begin{cases} y - z = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$ $\quad s : \begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$

(i) Stabilisci la posizione reciproca di r e s e calcola la distanza tra r e s.

(ii) Scrivi l'equazione del fascio di piani di asse r e trova, se esistono, tutti i piani del fascio che sono paralleli a s;

(iii) trova, se esistono, tutti i piani del fascio che distano $\sqrt{2}$ dal punto $(0, 3, 1)$;

(iv) trova, se esistono, tutti i piani del fascio che sono perpendicolari a s.
