

Cognome: \_\_\_\_\_ Nome: \_\_\_\_\_ Matricola: \_\_\_\_\_ Immatricolato nel \_\_\_\_\_

**ISTRUZIONI:** Prima di tutto, su ogni foglio che consegnerai devi scrivere nome e cognome. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio). Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma su fogli protocollo a quadretti. Deve essere ben chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se **più di una** risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere **giustificate**: non basta rispondere "Sì" o "No".

**Poni a uguale alla penultima cifra del tuo numero di matricola:**  $a = \underline{\hspace{2cm}}$

1. Dati i vettori  $a + 2, (a + 3)t^2, 1 - t^2, 2t^2 - 2$  di  $\mathbb{R}_2[t]$ , stabilire se sono linearmente indipendenti, se sono generatori di  $\mathbb{R}_2[t]$ , se sono una base di  $\mathbb{R}_2[t]$ .

2. E' vero che se un endomorfismo ha polinomio caratteristico  $p(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$ , allora non è mai diagonalizzabile?

3. Per ogni  $h \in \mathbb{R}$  discutere la mutua posizione della retta  $r : \begin{cases} hx + hy + z = 0 \\ hx + y + hz = h \end{cases}$  con l'asse delle  $x$ .

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvi nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

**A.** Al variare dei parametri  $k, h \in \mathbb{R}$  discuti la compatibilità del seguente sistema e, quando è possibile, trovane le soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 + (a + 1)x_2 + kx_3 = k \\ -x_1 - (a + 1)x_2 - 3x_3 + hx_4 = -k \\ -x_1 - (a + 1)x_2 - kx_3 + hx_4 = a \end{cases}$$

**B.** Dato il sottospazio  $W = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0, -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$  e

dato l'endomorfismo  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , tale che  $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$

- (i) trova una base di  $W$ ;
- (ii) trova una base di  $W^\perp$ ;
- (iii) determina il rango di  $T$  e una base di  $U = \text{Im } T$ ;
- (iv) trova dimensione e base di  $U + W$  e di  $U \cap W$ .

**C.**

(i) Trova la forma canonica metrica della conica di equazione

$$x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$$

(ii) Al variare del parametro  $k \in \mathbb{R}$ , classifica la quadrica di equazione

$$x^2 + y^2 - 2xy + (k - 1)z^2 - 2kyz - 2x - 2y + 1 = 0$$