

Cognome: _____ Nome: _____ Matricola: _____ Immatricolato nel _____

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su ogni foglio che consegnerai devi scrivere nome e cognome. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio). Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma su fogli protocollo a quadretti. Deve essere ben chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se **più di una** risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere **giustificate**: non basta rispondere "Sì" o "No".

Poni a uguale alla ultima cifra del tuo numero di matricola: $a =$ _____

1. Esiste un endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che e_1 appartiene sia a $\text{Ker } T$ che a $\text{Im } T$?
2. È vero che $W = \{p(t) \in \mathbb{R}_2[t] : p'(3) - 3p(0) = 10 - a\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_2[t]$?
3. Esiste una matrice $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ con spettro $\{a, \pi, -\pi\}$?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvi nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A.

- (i) Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ studia il seguente sistema omogeneo, trovandone le soluzioni:

$$\begin{cases} (k-1)x_1 + 2x_2 - 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2(k-1)x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 + (k+5)x_5 = 0 \\ (k-1)x_1 + 2x_2 + kx_4 + (k+5)x_5 = 0 \end{cases}$$

- (ii) Sia W_k il sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^5 delle soluzioni del sistema precedente e sia

$$U = \text{Span}\{(1+a)e_1, (10-a)e_2, e_3 - e_4 + e_5\}.$$

Determina, al variare di k , dimensione e base di $U \cap W_k$.

B. Data l'applicazione $\langle , \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$\langle v, w \rangle = v_1w_1 + v_1w_2 + v_2w_1 + 2v_2w_2 + v_3w_3 + (a+1)v_2w_4 + (a+1)v_4w_2 + (a+1)^2v_4w_4$$

- (i) Verifica che \langle , \rangle è una forma bilineare simmetrica su \mathbb{R}^4 ;
- (ii) scrivi la matrice S associata a \langle , \rangle rispetto a una base a tua scelta;
- (iii) stabilisci se \langle , \rangle è degenere;
- (iv) determina se \langle , \rangle è (semi)-definita positiva, negativa o indefinita.

C. Data la retta r di equazioni parametriche $x = 1 - t$, $y = -1 + 2t$, $z = 1 - 3t$, scrivere l'equazione del fascio di piani di asse r . Determinare poi, se esistono, i piani del fascio di asse r tali che:

- (i) sono paralleli al piano Π di equazione $x - y - z = 10 - a$;
- (ii) sono perpendicolari al piano Π ;
- (iii) sono perpendicolari alla retta s di equazioni cartesiane $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 2x + 2y - 6z = 1 \end{cases}$;
- (iv) sono paralleli alla retta s ;
- (v) distano $\frac{1}{\sqrt{6}}$ dal punto $P_0 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$.