

Scritto di Geometria. Anno Accademico 2011–2012. 10 Marzo 2012

Cognome: _____ Nome: _____ Matricola: _____ Immatricolato nel _____

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su ogni foglio che consegnerai devi scrivere nome e cognome. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio). Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma su fogli protocollo a quadretti. Dev'essere ben chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.

*Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se **più di una** risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere **giustificate**: non basta rispondere "Sì" o "No".*

Poni a uguale alla ultima cifra del tuo numero di matricola: $a = \underline{\hspace{2cm}}$

1. Esiste una matrice simmetrica in $M_{2,2}(\mathbb{R})$ la cui traccia valga 4 e il cui determinante valga $8 + a$?
 2. Esistono 4 piani distinti nello spazio la cui intersezione contenga più di un punto?
 3. Se una matrice 3×3 ha determinante nullo è sempre vero che la terza colonna è combinazione lineare delle prime due?
-

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvi nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Considera i sottospazi vettoriali U e W di \mathbb{R}^4 dati rispettivamente da

$$U = \{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 - x_2 + |6 - a|x_3 - x_4 = 0\}, \quad W = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 0\}.$$

- (i) Trova dimensione e basi di U e di W ;
- (ii) completa la base di U trovata al punto precedente ad una base di \mathbb{R}^4 ;
- (iii) esibisci una base di $U + W$ e una di $U \cap W$;
- (iv) completa la base di $U \cap W$ trovata al punto precedente ad una base di W .

B. Date le due matrici $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 13 & -2 & 1 \\ -6 & 12 & -6 \\ -7 & -10 & 5 \end{pmatrix}$

- (i) Trova gli autovalori di A e di B e stabilisci se le matrici sono diagonalizzabili.
- (ii) Trova, se possibile, una base di autovettori di A e una base di autovettori di B . Se non è possibile spiega perché.
- (iii) Trova, se possibile, una base ortonormale di autovettori di A e una base ortonormale di autovettori di B . Se non è possibile spiega perché.
- (iv) Verifica che ogni autovettore di B è anche autovettore di A , ma che esiste almeno un autovettore di A che non è autovettore di B .

C. Considera il polinomio $P_k(x) = x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_2x_3 - kx_3^2 + 4x_1 - 2kx_2 + 2(k+1)x_3 + 11$.

- (i) Trova per quali $k \in \mathbb{R}$ la quadrica associata a $P_k(x)$ interseca la retta di equazione $x_1 = 2t - 1$, $x_2 = 3 - 2t$, $x_3 = 1$;
 - (ii) trova la forma canonica affine della quadrica associata a $P_k(x)$ quando $k = 1$.
-

Corso di laurea Ingegneria: _____ Scelta turno orale: _____